30/01/2012 Num. Matr. ....

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u

$$S : \begin{cases} (10-a)x & +(10-b)y & +(10-b)z & & = & 1 \\ & (a-10)y & +kz & +u & = & b-10 \\ (10-a)x & +(20-a-b)y & +(a-10)z & -u & = & 11-b \\ & (10-a)y & -kz & -u & = & k+a-10 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k, dicendo per quali valori di k esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(6 punti)*.

1b) Determinare una rappresentazione cartesiana del sottospazio vettoriale U di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $v = (10-a, 0, 10-b, 0)$ e $w = (0, 1, 1, 1)$ *(3 punti)*.

2a) Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$. Dato l'endomorfismo $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A(x)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ \alpha+k & \alpha+k & 0 \\ 1 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

si calcolino gli autovalori di F *(2 punti)* e si dica per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo è diagonalizzabile *(4 punti)*.

2b) Fornire una rappresentazione cartesiana del piano π contenente la retta r di equazione cartesiana

$$\begin{cases} y & = & \alpha \\ x - z - \beta & = & 0 \end{cases}$$

ed ortogonale al piano $\pi' : \beta x + \alpha y = 0$ *(3 punti)*.

SOLUZIONI

1a) Siano A e C rispettivamente la matrice incompleta e completa associate ad S. Se $k \neq 20-a-b$ allora $\rho(A) = 3 \neq 4 = \rho(C)$, dunque $Sol(S) = \emptyset$. Se $k = 20 - a - b$ allora $\rho(A) = 2 = \rho(C)$, dunque $\dim Sol(S) = 4 - 2 = 2$.

1b) Una possibile rappresentazione cartesiana per U (nelle incognite x, y, z, u) è $U : \begin{cases} (10-b)x + (10-a)y - (10-a)z = 0 \\ y - u = 0 \end{cases}$.

2a) Il polinomio caratteristico è $(\lambda - (\alpha + k)) \cdot \lambda \cdot (\lambda - (\beta + 1))$ e quindi gli autovalori di F sono $0, \alpha + k, 1 + \beta$.

Per $k \neq -\alpha, 1 - \alpha + \beta$ l'endomorfismo F ammette 3 autovalori distinti, dunque è diagonalizzabile. Per $k = -\alpha$ vale che $ma(1 + \beta) = mg(1 + \beta) = 1$ e $ma(0) = mg(0) = 2$ e dunque F è diagonalizzabile. Per $k = 1 - \alpha + \beta$ vale che $ma(0) = mg(0) = 1$ e $ma(1 + \beta) = 2 \neq 1 = mg(1 + \beta)$ e dunque F non è diagonalizzabile.

Quindi F è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1 - \alpha + \beta$.

2b) Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è $\pi : \alpha x - \beta y - \alpha z = 0$.