13/02/2012 Num. Matr. ....

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) Si consideri la trasformazione lineare $T_k : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ canonicamente associata alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & k+b & 0 \\ 1+a-k & 0 & k-a-1 & -a-b-1 \\ 4 & 2 & -2 & k+b+4 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare le dimensioni di $\operatorname{Ker} T_k$ e $\operatorname{Im} T_k$ al variare del parametro reale k. *(5 punti)*
b) Posto $k = -b$, calcolare una base per $\operatorname{Im} T_{-b}$ e per il suo complemento ortogonale. *(4 punti)*

2) Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Dato l'endomorfismo $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A(x)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & k \\ 0 & \beta & -\beta \\ k & 0 & -\alpha \end{pmatrix},$$

a) Calcolare gli autovalori di F. *(2 punti)*
b) Stabilire per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo F è diagonalizzabile. *(4 punti)*
c) Date le rette r ed s aventi rappresentazione cartesiana

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ \beta y + \alpha z - \alpha\beta = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} z = 0 \\ \alpha x + \beta y - \alpha\beta = 0 \end{cases},$$

determinare l'intersezione tra r ed s *(1 punto)* ed una rappresentazione cartesiana del piano π contenente entrambe le rette. *(2 punti)*

SOLUZIONI

1)
a) Se $k \neq -b, 1+a$ allora $\rho(A_k) = 4$, dunque $\dim \operatorname{Im} T_k = 4$ e $\dim \operatorname{Ker} T_k = 0$. Se $k = -b$ allora $\rho(A_k) = 2$, dunque $\dim \operatorname{Im} T_k = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} T_k = 2$. Se $k = 1 + a$ allora $\rho(A_k) = 3$, dunque $\dim \operatorname{Im} T_k = 3$ e $\dim \operatorname{Ker} T_k = 1$.
b) Una base per $\operatorname{Im} T_{-b}$ è $\{(2, 0, 1 + a + b, 4), (1, 0, 0, 2)\}$, per il suo complemento ortogonale è $\{(-2, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0)\}$.

2)
a) Gli autovalori di F sono β, $-\alpha - k$, $-\alpha + k$.
b) Per $k \neq 0, -\alpha-\beta, \alpha+\beta$ l'endomorfismo F ammette 3 autovalori distinti, dunque è diagonalizzabile. Per $k = -\alpha-\beta, \alpha+\beta$ gli autovalori sono β e $-2\alpha - \beta$ e vale che $ma(-2\alpha - \beta) = mg(-2\alpha - \beta) = 1$ e $ma(\beta) = 2 \neq 1 = mg(\beta)$, dunque F non è diagonalizzabile. Per $k = 0$ gli autovalori sono β e $-\alpha$ e vale che $ma(\beta) = mg(\beta) = 1$ e $ma(-\alpha) = 2 = mg(-\alpha)$, dunque F è diagonalizzabile.
c) L'intersezione tra r ed s è data dal punto $(0, \alpha, 0)$. Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è $\pi : \alpha x + \beta y + \alpha z - \alpha\beta = 0$.