07/06/2012 Num. Matr. .....................

*Sostituire ai parametri $a$ e $b$ rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$).* **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali $x$, $y$, $z$, $u$

$$S : \left\{ \begin{array}{lllll} -x & -(b+2)y & +3z & +(a+3)u & = & 3 \\ (k-a-2)x & & & +(2-k)u & = & 1 \\ -x & -(b+2)y & -(2k+2b+1)z & +(a+3)u & = & 3 \\ -2(k-a-2)x & & & -(2b+8)u & = & -2 \end{array} \right.$$

al variare del parametro reale $k$, dicendo per quali valori di $k$ esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(6 punti)*.

1b) Si scriva la matrice associata, rispetto alla base canonica, ad una trasformazione lineare $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tra quelle per cui $T((a+1,0,b+1)) = (1,0)$ e $T((0,0,b+1)) = (0,(a+1)(b+1))$ *(3 punti)* .

2a) Si ponga $\alpha = a+1$ e $\beta = b+1$. Dato l'endomorfismo $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A(x)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -\beta & k+1 & -(k+1) \\ 0 & \alpha & 0 \\ -(k+1) & -\alpha-\beta & -\beta \end{pmatrix},$$

si calcolino gli autovalori di $F$ *(2 punti)* e si dica per quali valori del parametro reale $k$ l'endomorfismo è diagonalizzabile *(4 punti)*.

2b) Si calcoli una base per il complemento ortogonale del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $(\alpha+\beta,0,0,1)$ e $(0,-\beta,-1,0)$ *(3 punti)*.

---

SOLUZIONI

1a) Siano $A$ e $C$ rispettivamente la matrice incompleta e completa associate ad $S$. Se $k \neq -b-2, a+2$ allora $\rho(A) = 4 = \rho(C)$, dunque $\dim Sol(S) = 0$. Se $k = -b-2$ allora $\rho(A) = 2 = \rho(C)$, dunque $\dim Sol(S) = 2$. Se $k = a+2$ allora $\rho(A) = 3 \neq 4 = \rho(C)$, dunque $Sol(S) = \emptyset$.

1b) Una possibile soluzione è data dalla trasformazione lineare $T$ associata alla matrice

$$A_T = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a+1)} & 0 & 0 \\ -(b+1) & 0 & (a+1) \end{pmatrix}.$$

2a) Gli autovalori di F sono $\alpha, -\beta-k-1, -\beta+k+1$. Per $k \neq -\alpha-\beta-1, \alpha+\beta-1, -1$ l'endomorfismo $F$ ammette 3 autovalori distinti, dunque è diagonalizzabile. Per $k = -\alpha-\beta-1, \alpha+\beta-1$ vale che $ma(-\alpha-2\beta) = mg(-\alpha-2\beta) = 1$ e $ma(\alpha) = 2 \neq 1 = mg(\alpha)$ e dunque $F$ non è diagonalizzabile. Per $k = -1$ vale che $ma(\alpha) = mg(\alpha) = 1$ e $ma(-\beta) = 2 = mg(-\beta)$ e dunque $F$ è diagonalizzabile.

2b) Una possibile base è $\{(1,0,0,-\alpha-\beta),(0,1,-\beta,0)\}$.