23/07/2012 Num. Matr. ....

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) Si consideri la trasformazione lineare $T_k : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ canonicamente associata alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} b+1 & 0 & 2 & 3 \\ -2(b+1) & k & 1 & k+a \\ 0 & 2k+a+1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare le dimensioni di $\operatorname{Ker} T_k$ e $\operatorname{Im} T_k$ al variare del parametro reale k. *(4 punti)*
b) Posto $k = -a-1$, calcolare una base per $\operatorname{Ker} T_k$ *(3 punti)* ed una per $\operatorname{Im} T_k$. *(2 punti)*

2) Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Dato l'endomorfismo $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A(x)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta & -(\alpha+\beta) \\ 0 & \beta & 0 \\ -(\alpha+\beta) & -\beta & -\alpha \end{pmatrix},$$

a) Calcolare gli autovalori di F. *(3 punti)*
b) Provare che F è diagonalizzabile per similitudine. *(2 punti)*
c) Fornire una base spettrale per F. *(4 punti)*

SOLUZIONI

1)
a) Se $k \neq -a-1$ allora $\rho(A_k) = 3$, dunque $\dim \operatorname{Im} T_k = 3$ e $\dim \operatorname{Ker} T_k = 1$. Se $k = -a-1$ allora $\rho(A_{-a-1}) = 2$, dunque $\dim \operatorname{Im} T_{-a-1} = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} T_{-a-1} = 2$.
b) Una base per $\operatorname{Ker} T_{-a-1}$ è $\left\{ \left(\frac{-2}{b+1}, \frac{5}{a+1}, 1, 0 \right), \left(\frac{-3}{b+1}, \frac{5}{a+1}, 0, 1 \right) \right\}$. Una base per $\operatorname{Im} T_{-a-1}$ è $\{(2,1,5),(3,-1,5)\}$.

2)
a) Gli autovalori di F sono $\beta, -2\alpha - \beta$.
b) Vale che $mg(-2\alpha-\beta) = 1$ e $mg(\beta) = 2$. Dunque la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di F è pari a 3, e quindi F è diagonalizzabile.
c) Una base spettrale per F è $\{(\beta, -(\alpha+\beta), 0), (0, -(\alpha+\beta), \beta), (1,0,1)\}$.