10/09/2012 Num. Matr. ....

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z

$$S : \begin{cases} -4x & +(k+1)y & +(7-a)z & = & 2 \\ (10-b)x & & +(10-b)z & = & 0 \\ 2x & +y & +3z & = & 0 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k, dicendo per quali valori di k esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(5 punti)*.

1b) Data la trasformazione lineare $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$F((x, y, z, t)) = ((a+1)z - t, (b+1)x - y, (b+1)x - y - (a+1)z + t),$$

si determini una base per $\operatorname{Ker} F$ *(2 punti)* ed una per $\operatorname{Im} F$ *(2 punti)*.

2) Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Sia $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'endomorfismo definito da

$$T(1, 1) = (-\alpha, -\alpha),\ T(-1, 0) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta),$$

a) Si calcoli la matrice canonicamente associata a T *(3 punti)*.
b) Si calcolino gli autovalori di T *(3 punti)*.
c) Si dica se T ammette una base spettrale e, in caso affermativo, se ne calcoli una *(3 punti)*.

SOLUZIONI

1a) Siano A_k e C_k rispettivamente matrice incompleta e completa associate ad S. Se $k \neq 10 - a$ allora $\rho(A_k) = 3 = \rho(C_k)$, dunque S ammette soluzioni e $\dim Sol(S) = 0$. Se $k = 10 - a$ allora $\rho(A_{10-a}) = 2 \neq 3 = \rho(C_{10-a})$, dunque $Sol(S) = \emptyset$.

1b) La matrice canonicamente associata ad F è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & (a+1) & -1 \\ (b+1) & -1 & 0 & 0 \\ (b+1) & -1 & -(a+1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Una base per $\operatorname{Ker} F$ è $\{(1, (b+1), 0, 0), (0, 0, 1, (a+1))\}$. Una base per $\operatorname{Im} T$ è $\{(0, -1, -1), (-1, 0, 1)\}$.

2a) La matrice canonicamente associata ad F è

$$\begin{pmatrix} -(\alpha+\beta) & \beta \\ -(\alpha+\beta) & \beta \end{pmatrix}.$$

2b) Gli autovalori di F sono $0, -\alpha$.

2c) Una base spettrale per F è $\{(\beta, \alpha + \beta), (1, 1)\}$.