Appello del 12 dicembre 2005

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 163752; $a = 5$, $b = 2$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *riportando i* **CALCOLI PRINCIPALI E LE MOTIVAZIONI** *dei risultati ottenuti.* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1 **a)** Si calcoli la dimensione dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, t, u, al variare del parametro reale λ:

$$\begin{cases} (10-a)x & & & + & (10-a)t & & & = 0 \\ x & + & \lambda y & + & \lambda z & + & 2t & + & u & = 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & + & 3t & + & u & = 0 \\ & & 3y & + & z & + & (11-b)t & + & (11-b)u & = 1 \end{cases}$$

(5 punti)

b) Si calcoli una base per il nucleo della trasformazione lineare $S : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $S\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}\right) = \big((a+1)x_1 + x_2 - x_3, (b+1)x_3 - x_5, x_5 - x_6\big)$. ***(4 punti)***

2 **a)** Si consideri l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ così definito:

$$T_k(x, y, z, u) = ((a+1)x + (b+1)y + ku, (b+1)x + (a+1)y + (1-k)z, kz + u, -10u).$$

Si dica per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile. ***(4 punti)***

b) Siano r ed s le rette di $\mathbb{R}^3$ passanti rispettivamente per $P_1 = (0, a+1, 1)$ e $P_2 = (0, 0, 1)$, e per $Q_1 = (b+1, -1, 0)$ e $Q_2 = (1, 0, 1)$. Calcolare un'equazione cartesiana del piano parallelo ad r e ad s e passante per il punto $R = (-1, 1, -1)$. ***(3 punti)***

c) Se a è pari si dimostri che se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con $n \geq 1$ si ha che $\rho(A) + \rho(B) \geq \rho(A+B)$. ***(2 punti)*** Se a è dispari si dimostri che se A e B sono due matrici reali $n \times n$ con $n \geq 1$ si ha che $\rho(B) \geq \rho(A \cdot B)$ e $\rho(A) \geq \rho(A \cdot B)$. ***(2 punti)***

SOLUZIONI

1 **a)** La matrice incompleta e completa associate al sistema sono, rispettivamente,

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} (10-a) & 0 & 0 & (10-a) & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & (11-b) & (11-b) \end{pmatrix}$$

e

$$C_\lambda = \begin{pmatrix} (10-a) & 0 & 0 & (10-a) & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & (11-b) & (11-b) & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha che se $\lambda \neq \frac{5}{13-b}$ risulta $\rho(A_\lambda) = \rho(C_\lambda) = 4$ e quindi lo spazio delle soluzioni del sistema è non vuoto ed ha dimensione $5 - 4 = 1$. Se invece $\lambda = \frac{5}{13-b}$ risulta $\rho(A_\lambda) = 3 \neq \rho(C_\lambda) = 4$ e quindi lo spazio delle soluzioni del sistema è vuoto.

b) $\ker S$ è costituito da quelle matrici $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ i cui coefficienti verificano le equazioni del sistema $\begin{cases} (a+1)x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ (b+1)x_3 - x_5 = 0 \\ x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$ la cui soluzione ammette la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x_1 = r \\ x_2 = -(a+1)r + s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \\ x_5 = (b+1)s \\ x_6 = (b+1)s \end{cases}$$ nei parametri reali r, s, t. Quindi un insieme di generatori per il nucleo di S è dato da $B = \{(1, -(a+1), 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, b+1, b+1), (0, 0, 0, 1, 0, 0)\}$. Poiché $\rho\left(\begin{pmatrix} 1 & -(a+1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b+1 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3$ l'insieme B è anche linearmente indipendente e quindi è una base per $\ker S$.

2 **a)** La matrice associata a T_k rispetto alla base canonica è $A_k = \begin{pmatrix} a+1 & b+1 & 0 & k \\ b+1 & a+1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è

$$p(t) = \big((t-(a+1))^2 - (b+1)^2\big)(t-k)(t+10) = \big(t-(a+b+2)\big)\big(t-(a-b)\big)(t-k)(t+10)$$

e gli autovalori sono dunque $a+b+2, a-b, k, -10$. Se $k \neq a+b+2, a-b, -10$ abbiamo 4 autovalori distinti e quindi l'endomorfismo è diagonalizzabile.
Se $k = a+b+2$ si ha che $mg(a+b+2) = 1 < ma(a+b+2) = 2$ e quindi l'endomorfismo non è diagonalizzabile.
Se $k = a-b$ si ha che $mg(a-b) = 1 < ma(a-b) = 2$ nel caso $a \neq b+1$ (e quindi l'endomorfismo non è diagonalizzabile), mentre $mg(a+b+2)+mg(a-b)+mg(1) = 1+2+1 = 4$ nel caso $a = b+1$ (e quindi l'endomorfismo è diagonalizzabile).
Se $k = -10$ si ha che $mg(-10) = 1 < ma(-10) = 2$ e quindi l'endomorfismo non è diagonalizzabile.

b) La direzione ortogonale al piano cercato è quella del vettore

$$(P_1 - P_2) \wedge (Q_1 - Q_2) = \begin{vmatrix} 0 & a+1 & 0 \\ b & -1 & -1 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = \big(-(a+1), 0, -(a+1)b\big) = -(a+1)(1, 0, b),$$

e quindi quella del vettore $(1, 0, b)$. Il piano cercato avrà dunque equazione $x + bz + d = 0$. Imponendo il passaggio per $R = (-1, 1, -1)$ si ottiene $-1 - b + d = 0$ e perciò $d = b+1$. Si ottiene quindi l'equazione $x + bz + (b+1) = 0$.

c) Caso a pari. Siano S ed T gli endomorfismi da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ ai quali sono associate le matrici A e B rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Si ha che $\rho(A) = \dim(Im\ S)$ e $\rho(B) = \dim(Im\ T)$. Dato che $Im\ (S+T) \subseteq (Im\ S) + (Im\ T)$ si ha che $\dim\big(Im\ (S+T)\big) \leq \dim\big((Im\ S) + (Im\ T)\big)$. La relazione di Grassmann mostra che $\dim\big((Im\ S) + (Im\ T)\big) \leq \dim(Im\ S) + \dim(Im\ T)$. Quindi $\rho(A+B) = \dim\big(Im\ (S+T)\big) \leq \dim(Im\ S) + \dim(Im\ T) = \rho(A) + \rho(B)$.
Caso a dispari. Siano S ed T gli endomorfismi da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ ai quali sono associate le matrici A e B rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^n$. Visto che $Im\ T \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha che $Im\ (S \circ T) \subseteq Im\ S$ e quindi $\dim\big(Im\ (S \circ T)\big) \leq \dim(Im\ S)$. Quindi $\rho(A \cdot B) = \dim\big(Im\ (S \circ T)\big) \leq \dim(Im\ S) = \rho(A)$. Per quanto appena dimostrato si ha anche che $\rho(A \cdot B) = \rho\big({}^t(A \cdot B)\big) = \rho({}^tB \cdot {}^tA) \leq \rho({}^tB) = \rho(B)$.