12 dicembre 2007

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow a = \quad , b = \quad , c =$

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.**

`ESERCIZIO 1` *(3 punti)*

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & c & -1 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & -2 & 2b & 8 \\ 1 & c-1 & a-7 & b-1 & 8 \\ 2 & -1 & a-6 & b & 4 \end{pmatrix}$ e considerata la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ di equazione $(y) = A(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \operatorname{Ker} T$ e $\dim \operatorname{Im} T$.

RISPOSTA: $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T = 2, \dim \operatorname{Im} T = 3}$ per $a \neq 5$, $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T = 3, \dim \operatorname{Im} T = 2}$ per $a = 5$.

`ESERCIZIO 2` *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, u ammette soluzione:

$$\begin{cases} -x + (t-b-3)y + (c+1)z + u = 1 - t \\ (a+1)x + (a+1)y + az = 0 \\ -4x - 8y + 4u = 0 \\ x + 2y - (c+1)z - u = -1 \end{cases}$$

RISPOSTA: ammette soluzione se e solo se $t \neq b + 1$.

`ESERCIZIO 3` *(1 punto)*

Si calcoli l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} a+1 & -(c+1) \\ b+1 & 0 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $\frac{1}{(b+1)(c+1)} \begin{pmatrix} 0 & c+1 \\ -(b+1) & a+1 \end{pmatrix}$.

`ESERCIZIO 4` *(1 punto)*

Scrivere l'equazione di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ per la quale $(a+1, b+1)$ sia un autovettore associato all'autovalore $c + 1$.

RISPOSTA: $T(x, y) = \Big((c+1) \cdot x, (c+1) \cdot y\Big)$.

`ESERCIZIO 5` *(1 punto)*

Si trovi una forma diagonale per la matrice simmetrica $\begin{pmatrix} a & b+c+1 \\ b+c+1 & -a \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + (b+c+1)^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a^2 + (b+c+1)^2} \end{pmatrix}$.

(girare il foglio)

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 6}}$ *(3 punti)*

Si dica per quali valori del parametro reale k la matrice $\begin{pmatrix} a+1 & 0 & 11-c \\ 0 & k & b-7 \\ 1 & 0 & -(a+1) \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine.

RISPOSTA: Se $b \neq 7$ la matrice è diagonalizzabile se e solo se $k \neq \pm\sqrt{(a+1)^2 + 11 - c}$. Se $b = 7$ la matrice è diagonalizzabile per ogni valore di k.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 7}}$ *(1 punto)*

Scrivere una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ (rispetto al prodotto scalare standard) che contenga il vettore $(a+1, b+1, c+1)$.

RISPOSTA: $\Big(\big(a+1, b+1, c+1\big), \quad \big(b+1, -(a+1), 0\big), \quad \big(-(a+1)(c+1), -(b+1)(c+1), (a+1)^2 + (b+1)^2\big)\Big)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 8}}$ *(2 punti)*

Scrivere un'equazione cartesiana del piano π passante per i punti $(1, 10-c, 1)$ e $(1, 9-c, 2)$, e ortogonale al piano di equazione cartesiana $x + (10-b)y + (b-c)z + a = 0$.

RISPOSTA: $(10-c)x - y - z + 1 = 0$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 9}}$ *(3 punti)*

Siano A una matrice simmetrica reale $n \times n$ e $\mathbf{0}$ la matrice nulla $n \times n$. Dimostrare che $A^{100} = \mathbf{0}$ implica $A = \mathbf{0}$.

DIMOSTRAZIONE: Dato che A è una matrice simmetrica reale esiste una matrice ortogonale E tale che ${}^tE \cdot A \cdot E$ è una matrice diagonale reale D. Quindi $\mathbf{0} = {}^tE \cdot A^{100} \cdot E = ({}^tE \cdot A \cdot E)^{100} = D^{100}$. Quindi $D = \mathbf{0}$. Perciò $A = \mathbf{0}$.
