Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica e Ing. dell'Automazione)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio.**

14 gennaio 2013 Num. di matricola: $a =$, $b =$

Esercizio 1 (2 punti) Calcolare per quale valore del parametro reale k la dimensione dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y, z, s, t è uguale a 3:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z - 3ks + 5t = 0 \\ 2x - 10y - 10z - 2(a+b+1)s + 30t = 0 \\ x + 2y + z + 2(a+b+1)s - 5t = 0 \\ 5x + 3y - z + 7(a+b+1)s - 5t = 0 \end{cases}$$

VALORE DI k: $k = -(a+b+1)$.

Esercizio 2 (2 punti) Dire se il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, s, t è possibile:

$$\begin{cases} 3x - y - 3z + 3s + 5t = a+1 \\ 2x - 10y - 10z - 2(a+b+1)s + 30t = b+1 \\ x + 2y + z + 2(a+b+1)s - 5t = 0 \\ 5x + 3y - z + 7(a+b+1)s - 5t = 0 \end{cases}$$

RISPOSTA: NO.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine dell'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x,y,z) = \Big((a-10)x + (10-b)y + z, (10-b)x + (a-10)y + z, 0\Big).$$

BASE $\ker T = \{(1,1,b-a)\}$.
BASE $Im\ T = \{(10-b, a-10, 0), (1,1,0)\}$.

Esercizio 4 (1 punto) Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x,y,z) = \Big((a-10)x + (10-b)y + z, (10-b)x + (a-10)y + z, 0\Big).$$

AUTOVALORI: $0, a-b, a+b-20$.

Esercizio 5 (1 punto) Dire se l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito ponendo $T(x,y) = \Big((a+1)x + (b-5)y, (a+1)y\Big)$ è diagonalizzabile.

RISPOSTA: T è diagonalizzabile se e solo se $b = 5$.

Esercizio 6 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito ponendo $T(x,y) = \Big((a+1)x+(b+1)y, (b+1)x+(a+1)y\Big)$.

BASE SPETTRALE $= \{(1,1), (1,-1)\}$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una base ortogonale per il sottospazio dello spazio vettoriale euclideo standard di equazione cartesiana

$$(10-a)x + (b+1)y - z = 0.$$

BASE ORTOGONALE $= \Big\{(1, 0, 10-a), \big(-(10-a)(b+1), 1+(10-a)^2, b+1\big)\Big\}$.

Esercizio 8 (1 punto) Dire se la funzione $P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$P\left((x,y),(x',y')\right) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ b+1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: P è un prodotto scalare se e solo se $a > b$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, l'area del triangolo di vertici $A = (1,0,0)$, $B = (1,2,2)$, $C = (a+1, b+1, 0)$.

AREA DEL TRIANGOLO: $\sqrt{2a^2 + (b+1)^2}$.

Esercizio 10 (2 punti) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, un'equazione cartesiana del piano ortogonale a quelli di rispettive equazioni cartesiane $(a+1)x - y + (10-b)z = 1$ e $y = 2$ e passante per il punto $(0,0,0)$.

EQUAZIONE CARTESIANA: $(10-b)x - (a+1)z = 0$.

Esercizio 11 (2 punti) Dire, MOTIVANDO LA RISPOSTA, se esistono matrici 2×2 simmetriche e diverse dalla matrice $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$ che abbiano traccia uguale a $2(a+b)$ e determinante uguale a $(a+b)^2$.

RISPOSTA (CON MOTIVAZIONE): No. Sia A una tale matrice. Dato che A è simmetrica, da traccia e determinante si ricava che $a+b$ è l'unico autovalore di A e ha molteplicità algebrica e geometrica uguale a due. Dunque esiste una matrice ortogonale E per la quale risulta che $A = E \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} E^{-1} = (a+b) \cdot EIE^{-1} = (a+b) \cdot I = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$.