

Seconda prova dell'esame del corso

GEOMETRIA E ALGEBRA T

(Ing. Informatica e Ing. dell'Automazione)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio.**

28 gennaio 2013 **Matricola:** _____ **a =** _____ , **b =** _____

Esercizio 1 (2 punti) Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 & 1 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & b-2 & 1 \\ b-5 & b-5 & -2 & b-5 \end{pmatrix}.$$

RANGO: $\rho(A) = 4$ se $a \notin \{1, 2\}$ e $b \notin \{3, 4\}$; $\rho(A) = 3$ se $(a \notin \{1, 2\} \text{ e } b \in \{3, 4\})$ oppure $(a \in \{1, 2\} \text{ e } b \neq 4)$; $\rho(A) = 2$ se $a \in \{1, 2\}$ e $b = 4$.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -(a+1) & b+1 & b+1 & b+1 \\ b+1 & -(a+1) & b+1 & b+1 \\ b+1 & b+1 & -(a+1) & b+1 \\ b+1 & b+1 & b+1 & -(a+1) \end{pmatrix}.$$

$$\det A = (a+b+2)^3(a-3b-2).$$

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$T(x, y, z, t) = ((a-10)x + (10-b)y + z, (10-b)x + (a-10)y - z - t).$$

$$\text{BASE } \ker T = \{(1, 0, 10-a, a-b), (0, 1, b-10, a-b)\}.$$

$$\text{BASE } \text{Im } T = \text{una qualunque base di } \mathbb{R}^2 \text{ (per esempio } \{(1, 0), (0, 1)\}).$$

Esercizio 4 (2 punti) Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x, y, z) = (0, x + (b+1)y + (a-10)z, x + (a-10)y + (b+1)z).$$

$$\text{AUTOVALORI: } 0, a+b-9, b-a+11.$$

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definito ponendo $T(x, y) = ((a+1)x + y, -(b+1)y)$.

$$\text{BASE SPETTRALE} = \{(1, 0), (-1, a+b+2)\}.$$

Esercizio 6 (1 punto) Calcolare una base per il complemento ortogonale ${}^\perp U$ del sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana

$$(10-a)x + (b+1)y - z = 0.$$

$$\text{BASE DI } {}^\perp U = \{(10-a, b+1, -1)\}.$$

Esercizio 7 (1 punto) Dire per quali valori del parametro t la funzione $P : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$P((x, y), (x', y')) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10-a & t \\ t & 10-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: P è un prodotto scalare se e solo se $-\sqrt{(10-a)(10-b)} < t < \sqrt{(10-a)(10-b)}$.

Esercizio 8 (2 punti) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, il coseno dell'angolo α fra le rette r e s di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} x + y + (b-a)z = 0 \\ x + (10-a)z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x - y + (b-a)z = 0 \\ y + (10-b)z = 0 \end{cases}.$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{(10-a)^2 - (10-b)^2 + 1}{(10-a)^2 + (10-b)^2 + 1}.$$

Esercizio 9 (4 punti) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & a+b+2 \\ a+b+2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare la matrice A^{100} . (NON sviluppare le potenze. Per esempio lasciare 2^9 , senza scrivere $2^9 = 512$.)

$$A^{100} = \begin{pmatrix} \frac{(a+b+3)^{100} + (a+b+1)^{100}}{(a+b+3)^{100} - (a+b+1)^{100}} & \frac{(a+b+3)^{100} - (a+b+1)^{100}}{(a+b+3)^{100} + (a+b+1)^{100}} \\ \frac{(a+b+3)^{100} - (a+b+1)^{100}}{(a+b+3)^{100} + (a+b+1)^{100}} & \frac{(a+b+3)^{100} + (a+b+1)^{100}}{(a+b+3)^{100} - (a+b+1)^{100}} \end{pmatrix}.$$

Svolgimento dell'esercizio (da non riportare nella risposta).

Gli autovalori di A sono $t_1 = a+b+3$ e $t_2 = -(a+b+1)$. L'autospazio U_{t_1} è generato dall'autovettore $(1, 1)$, mentre l'autospazio U_{t_2} è generato dall'autovettore $(1, -1)$. Consideriamo la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, che ha come colonne gli autovettori di A . Si ha che $E^{-1} \cdot A \cdot E =$

$\begin{pmatrix} a+b+3 & 0 \\ 0 & -(a+b+1) \end{pmatrix}$. Quindi $A = E \cdot \begin{pmatrix} a+b+3 & 0 \\ 0 & -(a+b+1) \end{pmatrix} \cdot E^{-1}$. Segue che

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b+3 & 0 \\ 0 & -(a+b+1) \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Quindi

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a+b+3)^{100} & 0 \\ 0 & (-(a+b+1))^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

cioè

$$A^{100} = \begin{pmatrix} \frac{(a+b+3)^{100} + (a+b+1)^{100}}{2} & \frac{(a+b+3)^{100} - (a+b+1)^{100}}{2} \\ \frac{(a+b+3)^{100} - (a+b+1)^{100}}{2} & \frac{(a+b+3)^{100} + (a+b+1)^{100}}{2} \end{pmatrix}.$$