18 febbraio 2013 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica e Ing. dell'Automazione)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio.**

Esercizio 1 (2 punti) Calcolare il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b-1 & 3 & 1 \\ b & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a-1 & 1 \\ a+b-5 & a-3 & a-4 & a-4 \end{pmatrix}.$$

RANGO: $\rho(A) = 4$ se $a \notin \{3, 4\}$ e $b \notin \{1, 2\}$; $\rho(A) = 3$ se ($a \in \{3, 4\}$ e $b \notin \{1, 2\}$) oppure ($a \neq 4$ e $b \in \{1, 2\}$);$\rho(A) = 2$ se $a = 4$ e $b \in \{1, 2\}$.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 & a+1 & -(b+1) \\ a+1 & a+1 & -(b+1) & a+1 \\ a+1 & -(b+1) & a+1 & a+1 \\ -(b+1) & a+1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

$\det A = (a + b + 2)^3(b - 3a - 2)$.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((10 - a)x + (a - 10)z, (10 - b)y + (b - 10)z, 3y - 3z\Big).$$

BASE $\ker T = \{(1, 1, 1)\}$.

BASE $Im\ T = \{(1, 0, 0), (0, 10 - b, 3)\}$.

Esercizio 4 (2 punti) Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((10 - a)x + (10 - b)z, y, (10 - a)x + (10 - b)z\Big).$$

AUTOVALORI: $0, 1, 20 - a - b$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito ponendo $T(x,y) = \Big(x + (a+1)^2 y, (b+1)^2 x + y\Big)$.

BASE SPETTRALE $= \{(a+1, b+1), (a+1, -(b+1))\}$.

Esercizio 6 (1 punto) Calcolare una base per il complemento ortogonale ${}^\perp U$ del sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} (a+1)x & + & (b+1)y & - & z & + & t = 0 \\ (10-a)x & + & (10-b)y & + & z & - & t = 0 \end{cases}$$

BASE DI ${}^\perp U = \{(a+1, b+1, -1, 1), (1, 1, 0, 0)\}$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10-b \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10-a} & -\frac{1}{10-a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10-b} \\ 0 & 0 & \frac{1}{10-b} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8 (1 punto) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, l'area del triangolo di vertici $P \equiv (a+2, 2, 1)$, $Q \equiv (1, 2b+2, 1)$, $R \equiv (0, 0, 1)$.

AREA DEL TRIANGOLO: $(a+2)(b+1) - 1$.

Esercizio 9 (4 punti) Sia A la matrice $(100+a) \times (100+a)$ che contiene in ogni sua cella il numero $b+1$. Calcolare gli autovalori di A e le loro rispettive molteplicità geometriche.

AUTOVALORI E LORO MOLTEPLICITÀ GEOMETRICHE: Gli autovalori di A sono 0 (con molteplicità geometrica $99+a$) e $(100+a)(b+1)$ (con molteplicità geometrica 1).

Svolgimento dell'esercizio (da non riportare nella risposta).

Poniamo $n = 100+a$. Dato che la matrice A ha rango 1, la trasformazione lineare T a cui A è canonicamente associata ha nucleo di dimensione $n-1$. Segue che 0 è un autovalore di A (il suo autospazio coincide con $\ker T$). Quindi $mg(0) = n-1$.

Se $(x_1, \ldots, x_n)$ è un autovettore di A e λ è il suo autovalore, si ha che

$$\begin{pmatrix} b+1 & \cdots & b+1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b+1 & \cdots & b+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

e quindi

$(b+1)(x_1+\ldots+x_n) = \lambda x_1 = \ldots = \lambda x_n$. Se $\lambda \neq 0$ si ha che $x_1 = \ldots = x_n$, per cui $(x_1, \ldots, x_n)$ è un multiplo di $(1, \ldots, 1)$. Quindi ogni autovettore che non appartenga a $\ker T$ deve essere un multiplo di $(1, \ldots, 1)$.

Si verifica che

$$\begin{pmatrix} b+1 & \cdots & b+1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b+1 & \cdots & b+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n(b+1) \\ \vdots \\ n(b+1) \end{pmatrix} = n(b+1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

perciò $n(b+1)$ è un autovalore di A e $mg(n(b+1)) = 1$.