15 Giugno 2013 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica e Ing. dell'Automazione)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z + (a+3)t = a+2 \\ -x - ky + (b+1)z + (b-1)t = b-1+k \\ 2x + y + 4t = 3 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Il sistema lineare $\mathbf{S}_k$ è possibile per qualunque k. Se $k = \frac{a-b}{2a+2}$ si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 2$, altrimenti $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+3 & 2 & 2 & 1 \\ b+3 & b+3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (a+1)(b+1)$.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((11-a)x - (11-a)y + z, (11-b)x - (11-b)y + z, x - y + z\Big).$$

BASE $\ker T = \{(1, 1, 0)\}$.
BASE $Im\ T = \{(11-a, 11-b, 1), (1, 1, 1)\}$.

Esercizio 4 (2 punti) Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((10-a)x + (10-b)y + z, (10-b)x, -(10-b)^2x\Big).$$

AUTOVALORI: $0, 10-a$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito ponendo $T(x, y) = \Big((b+1)^2 y, (a+1)^2 x\Big)$.

BASE SPETTRALE $= \{(b+1, a+1), (b+1, -(a+1))\}$.

Esercizio 6 (1 punto) Calcolare una base per il complemento ortogonale ${}^{\perp}U$ del sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} (a+1)x & + & (a+2)y & + & (a+3)z & + & (a+4)t = 0 \\ (b+4)x & + & (b+3)y & + & (b+2)z & + & (b+1)t = 0 \end{cases}.$$

BASE DI ${}^{\perp}U = \{(a+1, a+2, a+3, a+4), (b+4, b+3, b+2, b+1)\}$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10-a & 0 \\ 10-b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{(10-b)} \\ 0 & \frac{1}{10-a} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (1 punto) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, l'area del triangolo di vertici $P \equiv (1, 0, 0)$, $Q \equiv (1, 1, 2a+2)$, $R \equiv (1, b+2, 2)$.

AREA DEL TRIANGOLO: $(a+1)(b+2) - 1$.

Esercizio 9 (3 punti) Sia

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ \frac{1}{b+1} & \frac{1}{a+1} \end{pmatrix}.$$

Si calcoli, per un generico numero naturale n, la traccia della matrice A^n.

Svolgimento dell'esercizio (da non riportare nella risposta). Il polinomio caratteristico di A è $p(t) = t^2 - (a+1+\frac{1}{a+1})t$, che ammette le due radici distinte 0 e $a+1+\frac{1}{a+1}$. Quindi A è diagonalizzabile per similitudine e simile alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+1+\frac{1}{a+1} \end{pmatrix}.$$

Perciò A^n è simile alla matrice D^n. Dunque la traccia di A^n coincide con la traccia di D^n, che è uguale a $\left(a+1+\frac{1}{a+1}\right)^n$.