23 Luglio 2013 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica e Ing. dell'Automazione)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} x + y - z = k \\ (b+1)y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \\ kx + z = a+1 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $b \neq 1$ il sistema lineare $\mathbf{S}_k$ è possibile se e solo se $k = \pm\sqrt{a+1}$, e in tal caso $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$ (cioè esiste una e una sola soluzione). Se $b = 1$ il sistema lineare $\mathbf{S}_k$ ammette una e una sola soluzione per ogni valore di k (cioè $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 0$ per ogni valore di k).

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a+2 & a+3 & a+4 \\ b-1 & b-2 & b-3 & b-4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 3(a+b)$.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z, t) = \Big((10-a)x+y+z+(10-a)t, x+(10-b)y, x+y+z+(10-a)t\Big).$$

BASE $\ker T = \{(0, 0, 10-a, -1)\}$ se $a \neq 9$,
BASE $\ker T = \{(b-10, 1, 0, 9-b), (0, 0, 1, -1)\}$ se $a = 9$.

BASE $Im\ T = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ (o una qualunque altra base di $\mathbb{R}^3$) se $a \neq 9$,
BASE $Im\ T = \{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ se $a = 9$.

Esercizio 4 (2 punti) Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x, y, z) = \Big(x + (10 - b)z, (10 - a)y, (10 - b)x + z\Big).$$

AUTOVALORI: $10 - a, 11 - b, b - 9$ (non necessariamente distinti).

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito ponendo $T(x, y) = \Big((a+1)x+(a+1)y, (b+1)x+(b+1)y\Big)$.

BASE SPETTRALE $= \{(1, -1), (a + 1, b + 1)\}$.

Esercizio 6 (1 punto) Calcolare una base per il complemento ortogonale $^{\perp}U$ del sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^4$ generato dal vettore $(a + 1, 0, b + 1, 0)$.

BASE DI $^{\perp}U = \{(b + 1, 0, -(a + 1), 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 - b & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 - a \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(10-b)} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{(10-b)} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{(10-a)} & \frac{1}{(10-a)} \end{pmatrix}.$

Esercizio 8 (1 punto) Calcolare, nel piano euclideo standard $\mathbb{R}^2$, l'area del parallelogramma di vertici $P \equiv (0, 0)$, $Q \equiv (a + 1, 1)$, $R \equiv (1, b + 1)$, $S \equiv (a + 2, b + 2)$.

AREA DEL PARALLELOGRAMMA: $ab + a + b$.

Esercizio 9 (3 punti) Si calcoli il polinomio caratteristico p_A della matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, sapendo che A è simmetrica, $Tr(A^{2013}) = 0$ e $\det(A^{2013}) = -(a + 1)^{4026}$.

Svolgimento dell'esercizio (da non riportare nella risposta). Dato che A è simmetrica, è anche diagonalizzabile per similitudine. Dunque A è simile a una matrice diagonale D, e quindi A^{2013} è simile alla matrice diagonale D^{2013}. Perciò $Tr(D^{2013}) = 0$ e $\det(D^{2013}) = -(a + 1)^{4026}$. Ponendo

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

si ha che

$$D^{2013} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2013} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{2013} \end{pmatrix}$$

e dunque $\lambda_1^{2013} + \lambda_2^{2013} = 0$ e $\lambda_1^{2013} \cdot \lambda_2^{2013} = -(a+1)^{4026}$.

Ne consegue che $\lambda_1 = -\lambda_2$ e $\lambda_1 = \pm(a+1)$.

Quindi

$$D = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & -(a+1) \end{pmatrix}$$

oppure

$$D = \begin{pmatrix} -(a+1) & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

In entrambi i casi il polinomio caratteristico di D è $t^2 - (a+1)^2$. Dato che D è simile ad A, questo è anche il polinomio caratteristico $p_A(t)$ di A.