9 settembre 2013 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica e Ing. dell'Automazione)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} -x & & + & 3z & - & 2t & = & 4 \\ x & + & (a+2)y & + & kz & + & (a+4)t & = & a+2k \\ 3x & + & (b-2)y & - & 4z & + & (b+4)t & = & b \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $a \neq 0$ e $b \notin \{0, 2\}$ il sistema lineare $\mathbf{S}_k$ è possibile se e solo se $k \neq \frac{5a-3b+16}{b-2}$ ed in tal caso $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$. Se $b = 2$ il sistema lineare $\mathbf{S}_k$ è possibile per qualunque k e $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$. Se $a = 0$ e $b = 0$ il sistema lineare $\mathbf{S}_k$ è possibile per qualunque k e si ha che se $k = -8$ $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 2$, altrimenti $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+2 & a+2 & a+2 \\ b & b+1 & 1 & b+2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 4a + 5b + 14$.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((a+2)x - (a+2)y, -(b+1)x + (2b+2)y - (2b+2)z, 2y - 4z\Big).$$

BASE $\ker T = \{(2, 2, 1)\}$.

BASE $Im\ T = \{(a+2, -b-1, 0), (0, b+1, 2)\}$.

Esercizio 4 (2 punti) Calcolare gli autovalori dell'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((x + (b+1)y, (a+2)y - 2bz, -2by + (a+2)z\Big).$$

AUTOVALORI: 1, $a - 2b + 2$, $a + 2b + 2$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito ponendo

$$T(x, y) = \Big((a+2)x + (b+1)^2 y, (a+1)^2 x + (a+2)y\Big).$$

BASE SPETTRALE $= \{(b+1, a+1), (b+1, -(a+1))\}$.

Esercizio 6 (1 punto) Calcolare una base per il complemento ortogonale ${}^{\perp}U$ del sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^4$ di equazione cartesiana

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a^2x & + & (a+1)y & + & (a-1)z & + & 2t = 0 \\ bx & + & (b+1)y & + & (b+2)z & - & 4t = 0 \end{array}\right. .$$

BASE DI ${}^{\perp}U = \big\{(a^2, a+1, a-1, 2), (b, b+1, b+2, -4)\big\}$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+3 & b+2 & b+2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a+3 & a+3 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+3} & 0 & -\frac{b+2}{(a+3)^2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{a+3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Esercizio 8 (1 punto) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, l'area del triangolo di vertici $P \equiv (0, 2, 1)$, $Q \equiv (a+b, 2, 1)$, $R \equiv (3, a-b, 1)$. (Se P, Q, R sono allineati scrivere che l'area è nulla.)

AREA DEL TRIANGOLO: $\frac{1}{2}|(a-b-2)(a+b)|$.

Esercizio 9 (3 punti) Sia

$$A = \begin{pmatrix} a+10 & a^2 - 100 \\ -1 & a-10 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} (a+10)(b+5) & 0 \\ a^2 - 100 & (a-10)(b+5) \end{pmatrix}.$$

Si trovi $X \in M_2(\mathbb{R})$ tale che $AX - 2B = 0$.

RISPOSTA: $X = 2 \cdot A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -a^2 + b + 105 & -(a-10)(b+5) \\ \frac{a^2+b-95}{a-10} & b+5 \end{pmatrix}$.