13 dicembre 2006

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 263571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u

$$\begin{cases} x & & +2z & +u & = & 2 \\ -x & & -2z & -(t-a+1)u & = & -2 \\ & +(a+1)y & -(a+1)z & & = & 0 \\ (b+1)x & +2y & -(t-b+1)z & -tu & = & -1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(5 punti)*

b) Si calcoli una base per il complemento ortogonale del sottospazio di $I\!R^4$ dato da

$$U = L\Big(\big\{(0,1,-(b+1),(b+1)),\,(1,0,-(a+1),0)\big\}\Big).$$

(3 punti)

2) Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$.

a) Si consideri l'endomorfismo $T_k : I\!R^3 \to I\!R^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & k \\ 0 & -\beta & 0 \\ k & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile. *(5 punti)*

b) Nello spazio euclideo 3-dimensionale, fornire una rappresentazione cartesiana del piano passante per i punti $A = (0,1,1), B = (0,-\beta,0)$ e parallelo alla retta di equazioni parametriche $r : x = 1+\alpha t, y = t, z = 0, t \in I\!R$. *(3 punti)*

c) **Se b è un numero pari**, dimostrare che se $A \in M_n(I\!R)$ è simmetrica, allora $Tr(A^2) \geq 0$; **se b è un numero dispari**, dimostrare che se $A \in M_2(I\!R)$ e $A^2 = A$, allora 0 e 1 sono gli unici possibili autovalori di A. *(2 punti)*

SOLUZIONI:

1a) La matrice incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & (-t+a-1) \\ 0 & (a+1) & -(a+1) & 0 \\ (b+1) & 2 & (-t+b-1) & -t \end{pmatrix}$$

e

$$C_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & (-t+a-1) & -2 \\ 0 & (a+1) & -(a+1) & 0 & 0 \\ (b+1) & 2 & (-t+b-1) & -t & -1 \end{pmatrix}.$$

Se $t \neq -b-1, a$ risulta $\rho(A_t) = \rho(C_t) = 4$ e dim(Sol(S))=0; se $t = -b-1$ risulta $\rho(A_{-b-1}) = 3 \neq 4 = \rho(C_{-b-1})$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$; se $t = a$ risulta $\rho(A_a) = \rho(C_a) = 3$ e dim(Sol(S))=1.

1b) Una base per ${}^{\perp}U$ è $\{(a+1, b+1, 1, 0), (0, -(b+1), 0, 1)\}$.

2a) Il polinomio caratteristico è $p(t) = (t+\beta)((t-\alpha)^2 - k^2)$. Gli autovalori sono $-\beta, \alpha+k, \alpha-k$.

Se $k \neq 0, -\alpha-\beta, \alpha+\beta$ si hanno tre autovalori distinti e quindi A_k è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = \alpha+\beta$ abbiamo che $ma(-\beta) = mg(-\beta) = 2$ e $ma(2\alpha+\beta) = mg(2\alpha+\beta) = 1$ e dunque $A_{\alpha+\beta}$ è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = -\alpha-\beta$ abbiamo che $ma(2\alpha+\beta) = mg(2\alpha+\beta) = 1$ e $ma(-\beta) = 2 \neq 1 = mg(-\beta)$ e dunque $A_{-\alpha-\beta}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = 0$ abbiamo che $ma(\alpha) = mg(\alpha) = 2$ e $ma(-\beta) = mg(-\beta) = 1$, quindi A_0 è diagonalizzabile per similitudine.

2b) Una equazione del piano cercato è $\pi : x - \alpha y + \alpha(1+\beta)z - \alpha\beta = 0$.

2c) **caso b pari:** vale che se $A \in M_n(I\!R)$ è simmetrica allora A è diagonalizzabile per similitudine, più precisamente esistono una matrice ortogonale $E \in O_n(I\!R)$ e una matrice diagonale $D \in M_n(I\!R)$ tali che $E^{-1} \cdot A \cdot E = D$ o, equivalentemente, $A = E \cdot D \cdot E^{-1}$. Allora, $A^2 = A \cdot A = E \cdot D \cdot E^{-1} E \cdot D \cdot E^{-1} = E \cdot D^2 \cdot E^{-1}$, cioè A^2 e D^2 sono simili, e quindi hanno stessa traccia. Ora, $D = diag(d_1, \ldots, d_n)$, $D^2 = diag(d_1^2, \ldots, d_n^2)$ e quindi $Tr(D^2) = Tr(A^2) = d_1^2 + \ldots + d_n^2 \geq 0$.

2c) **caso b dispari:** supponiamo che λ sia un autovalore di A: allora, esisterà un vettore $\mathbf{v} \in I\!R^2$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, tale che $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Essendo $A = A^2$, risulta anche $A^2\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. D'altra parte, $A^2\mathbf{v} = A \cdot A\mathbf{v} = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$, da cui risulta $\lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Essendo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, vale che $\lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v} \Leftrightarrow (\lambda - \lambda^2)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \lambda - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, 1$.