13 gennaio 2014 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare le eventuali radici in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (a+1)x + (b+1)y + \left(k^2-(a+1)^2\right)z - (a+1)t = 1 \\ (a+1)x + 2(b+1)y + kz - (a+1)t = 1 \\ 3(a+1)x + 3(b+1)y - 3(a+1)t = 0 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k = \pm(a+1)$ allora $\mathbf{S}_k = \emptyset$. Se $k \neq \pm(a+1)$ allora $\mathbf{S}_k \neq \emptyset$ e $\dim \mathbf{S}_k = 1$.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & 0 & 10-b \\ 0 & 10-a & 10-b & 0 \\ 0 & 10-b & 10-a & 0 \\ 10-b & 0 & 0 & 10-a \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = \left((10-a)^2 - (10-b)^2\right)^2$.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((10-a)x + (10-b)y, x - z, (10-b)y + (10-a)z\Big).$$

BASE $\ker T = \{(10-b, a-10, 10-b)\}$.

BASE $Im\ T = \{(10-a, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

Esercizio 4 (2 punti) Dire per quali valori del parametro reale t l'endomorfismo $T_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x,y,z) = \Big((a+1)x - tz, (b+1)y, y + tz\Big)$$

ammette una base spettrale.

RISPOSTA: Se $a \neq b$ allora la base spettrale esiste se e solo se $t \neq a+1, b+1$. Se $a = b$ allora la base spettrale esiste se e solo se $t = 0$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare una base ortogonale per il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $(a+1)x - (b+1)y + z = 0$.

BASE ORTOGONALE $=\big\{(1, 0, -(a+1)), \big((a+1)(b+1), 1 + (a+1)^2, b+1\big)\big\}$.

Esercizio 6 (1 punto) Dire per quali valori del parametro reale t (se esistono) la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a^2 & t \\ t & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: è un prodotto scalare se e solo se $-ab < t < ab$. (N.B.: l'insieme dei t tali che $-ab < t < ab$ è vuoto se e solo se $ab = 0$.)

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, l'area del triangolo di vertici $P \equiv (0, 1, 10 - a)$, $Q \equiv (1, 0, b+1)$, $R \equiv (1, 1, 0)$.

AREA DEL TRIANGOLO: $\frac{1}{2}\sqrt{1 + (10-a)^2 + (b+1)^2}$.

Esercizio 8 (3 punti) Sia U il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $(a+1)x + (10-b)y - z = 0$. Sia $p_U : \mathbb{R}^3 \to U$ la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su U. Calcolare $p_U\left((0,0,1)\right)$.

RISPOSTA: $p_U\left((0,0,1)\right) =$

$$\frac{1}{1+(a+1)^2+(10-b)^2} \begin{pmatrix} 1 + (10-b)^2 & -(a+1)(10-b) & a+1 \\ -(a+1)(10-b) & 1 + (a+1)^2 & 10-b \\ a+1 & 10-b & (a+1)^2 + (10-b)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a+1}{1+(a+1)^2+(10-b)^2} \\ \frac{10-b}{1+(a+1)^2+(10-b)^2} \\ \frac{(a+1)^2+(10-b)^2}{1+(a+1)^2+(10-b)^2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9 (2 punti) Calcolare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(0,0,0)$ e ortogonale ai piani di rispettive equazioni $(a+1)x - y - (b+1)z = 1$, $(b+1)x - y - (10-a)z = 2$.

EQUAZIONE DEL PIANO: $(a+b-9)x+(a^2+b^2+2b-9a-9)y+(a-b)z = 0$. (N.B.: nel caso particolare $a = b$ l'equazione si può più semplicemente scrivere come $x + (a+1)y = 0$.)
