27 gennaio 2014 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare le eventuali radici in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (10-a)x - \left(k^2-(10-a)^2\right)y + (10-b)z - (10-a)t = 1 \\ 2(10-a)x + 2(10-b)z - 2(10-a)t = 0 \\ (10-a)x - ky + 2(10-b)z - (10-a)t = 1 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k = \pm(10-a)$ allora $Sol(\mathbf{S}_k) = \emptyset$. Se $k \neq \pm(10-a)$ allora $Sol(\mathbf{S}_k) \neq \emptyset$ e $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & b+1 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & b+1 \\ 0 & b+1 & 0 & a+1 \\ b+1 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = -\left((a+1)^2-(b+1)^2\right)^2$.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((b+1)x + (a+1)y, y-z, (b+1)x + (a+1)z\Big).$$

BASE $\ker T = \{(-(a+1), b+1, b+1)\}$.

BASE $Im\ T = \{(a+1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

Esercizio 4 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((10 - a)x + (10 - b)y, (10 - b)x + (10 - a)y, 0\Big).$$

RISPOSTA: $((1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1))$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare una base ortogonale per il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + (10 - a)y - (10 - b)z = 0$.

BASE ORTOGONALE $=\big\{(-(10 - a), 1, 0)\,, \big((10 - b), (10 - a)(10 - b), 1 + (10 - a)^2\big)\big\}$.

Esercizio 6 (1 punto) Dire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} (9 - a)^2 & t + 1 \\ t + 1 & (9 - b)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: è un prodotto scalare se e solo se $-(9 - a)(9 - b) - 1 < t < (9 - a)(9 - b) - 1$. (N.B.: l'insieme dei t tali che $(9 - a)(9 - b) - 1 < t < (9 - a)(9 - b) - 1$ è vuoto se e solo se $(9 - a)(9 - b) = 0$.)

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, l'area del parallelogramma di vertici $P \equiv (1, a + 1, 0)$, $Q \equiv (0, 10 - b, 1)$, $R \equiv (1, 0, 1)$, $S \equiv (0, (a + 1) + (10 - b), 0)$.

AREA DEL PARALLELOGRAMMA: $\sqrt{1 + (a + 1)^2 + (10 - b)^2}$.

Esercizio 8 (3 punti) Sia U il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - (10 - a)y - (b + 1)z = 0$. Sia $p_U : \mathbb{R}^3 \to U$ la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su U. Calcolare $p_U\,((1, 0, 0))$.

RISPOSTA: $p_U\,((1, 0, 0)) =$

$$\frac{1}{1+(10-a)^2+(b+1)^2} \begin{pmatrix} (10 - a)^2 + (b + 1)^2 & 10 - a & b + 1 \\ 10 - a & 1 + (b + 1)^2 & -(10 - a)(b + 1) \\ b + 1 & -(10 - a)(b + 1) & 1 + (10 - a)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(10-a)^2+(b+1)^2}{1+(10-a)^2+(b+1)^2} \\ \frac{10-a}{1+(10-a)^2+(b+1)^2} \\ \frac{b+1}{1+(10-a)^2+(b+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 9 (2 punti) Dire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali le due rette

$$r_t : \begin{cases} (a+1)x + (b+1)y - z = 0 \\ tx + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{e } s_t : \begin{cases} (b+1)x + (a+1)y + z = 1 \\ x + ty - z = 0 \end{cases}$$

si intersechino in **esattamente** un punto e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $a = 0$ non esistono valori di t per i quali l'intersezione di r_t e s_t sia data da un singolo punto. Se $a \neq 0$, le rette r_t e s_t si intersecano in esattamente un punto se e solo se $t = a + b + 1$.
