10 febbraio 2014 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare le eventuali radici in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (a+1)x + (b+1)y + z - u = k \\ (a+1)x + ky + z + u = b+1 \\ (b+1-k)y - 2u = (b+1-k)^2 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k \neq b+1, b+2$ allora $Sol(\mathbf{S}_k) = \emptyset$. Se $k \in \{b+1, b+2\}$ allora $Sol(\mathbf{S}_k) \neq \emptyset$ e $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 2$.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 20-b & 0 & 10-a \\ 10-a & 0 & 20-b & 0 \\ 0 & 10-a & 0 & 20-b \\ 20-b & 0 & 10-a & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = -(30-a-b)^2 \cdot (10+a-b)^2$.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((a+1)x + y + z, x + (b+1)y + z, (a+2)x + (b+2)y + 2z\Big).$$

RISPOSTA:

Se $a + b \neq 0$: BASE $\ker T = \{(b, a, -ab - a - b)\}$ e BASE $Im\ T = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

Se $a + b = 0$: BASE $\ker T = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ e BASE $Im\ T = \{(1, 1, 2)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale t l'endomorfismo $T_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T_t(x, y, z) = \Big(tx + (10-a)y + (10-b)z, (10-b)y, -tz\Big)$$

ammette una base spettrale.

RISPOSTA: La base spettrale esiste se e solo se $t \neq 0, 10-b$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare una base ortogonale per il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato dai due vettori $(a+1, 10-b, 1)$ e $(1, 0, 0)$.

BASE ORTOGONALE $=\{(0, b-10, -1), (1, 0, 0)\}$.

Esercizio 6 (1 punto) Dire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a-t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-b+10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $b - 10 < t < a$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, l'area del triangolo di vertici $P \equiv (11-a, 11-a, 1)$, $Q \equiv (1, b+2, b+2)$, $R \equiv (1, 1, 1)$.

AREA DEL TRIANGOLO: $\frac{\sqrt{3}}{2}(10-a)(b+1)$.

Esercizio 8 (3 punti) Sia U il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^3$ generato dai due vettori $(a+1, b+1, 1)$ e $(1, 0, 0)$. Sia $p_U : \mathbb{R}^3 \to U$ la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su U e sia $P = \big((b+1)^2+1, (b+1)^2+1, (b+1)^2+1\big)$. Calcolare $p_U(P)$.

RISPOSTA: $p_U(P) = \big((b+1)^2+1, (b+1)^2+b+1, b+2\big)$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(a, b, 0)$ e ortogonale al piano di equazione cartesiana $(10-a)x - y - (10-b)z = 1$.

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA: $x = (10-a)t + a, y = -t + b, z = (b-10)t$.
