**16 giugno 2014 Matricola: a = , b =**

# Seconda prova dell'esame del corso
## GEOMETRIA E ALGEBRA T
## (Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri $a$ e $b$ rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare le eventuali radici in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

---

**Esercizio 1 (3 punti)** Dire per quali valori del parametro reale $k$ il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite $x, y, z, u$ è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + (a+1)z + \Big((a-b)k + (a+1)(b+1)\Big)u = 2 \\ x + 2y + kz + \Big((a-b)k + (a+1)(b+1)\Big)u = 2 \\ x + 2y + (a+1)z + k^2u = 2 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Il sistema lineare è possibile per ogni valore di $k$. Si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 3$ per $k = a+1$, $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 2$ per $k = -b-1$ e $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$ per $k \neq a+1, -b-1$.

---

**Esercizio 2 (2 punti)** Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 10-a & 10-b & 0 \\ 0 & 10-b & 10-a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 2\left((10-b)^2 - (10-a)^2\right)$.

---

**Esercizio 3 (2 punti)** Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x,y,z) = \Big((a+1)x+(b+1)y+z, 2(a+1)x+2(b+1)y+2z, -(a+1)x-(b+1)y-z\Big).$$

BASE Ker $T = \{(1,0,-a-1), (0,1,-b-1)\}$.

BASE Im $T = \{(1,2,-1)\}$.

---

**Esercizio 4 (3 punti)** Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x, y, z) = \Big( -(10-a)x + (10-b)y, y, z \Big).$$

BASE SPETTRALE: $\Big\{(1, 0, 0), (10-b, 11-a, 0), (0, 0, 1)\Big\}$.

---

**Esercizio 5 (1 punto)** Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dalle due rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = (a+1)t, y = (b+1)t, z = -(a+1)t$ e $x = t, y = t, z = t$, rispettivamente.

COSENO $= \frac{b+1}{\sqrt{2(a+1)^2+(b+1)^2}\sqrt{3}}$.

---

**Esercizio 6 (2 punti)** Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale $t$ per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $a > b+1$, la funzione è un prodotto scalare per ogni $t \neq 0$. Se $a \leq b+1$, non esistono valori di $t$ per i quali la funzione sia un prodotto scalare.

---

**Esercizio 7 (1 punto)** Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, l'area del parallelogramma di vertici $P \equiv (0, 1, 10-a)$, $Q \equiv (1, 0, 10-b)$, $R \equiv (1, 1, 0)$, $S \equiv (0, 0, (10-a)+(10-b))$. (Si noti che $(P-R)+(Q-R) = (S-R)$.)

AREA DEL PARALLELOGRAMMA: $\sqrt{(10-a)^2 + (10-b)^2 + 1}$.

---

**Esercizio 8 (2 punti)** Si trovi un vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che l'insieme $\{(10-a, 10-b, 10-a), (10-b, a-10, 0), (x, y, z)\}$ risulti essere una base ortogonale per $\mathbb{R}^3$.

RISPOSTA: $(x, y, z) = \Big((10-a)^2, (10-a)(10-b), -(10-a)^2 - (10-b)^2\Big)$.

---

**Esercizio 9 (2 punti)** Calcolare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $(a+1, b+1, 0)$, $(a+1, 0, b+1)$ e $(0, a+1, b+1)$.

EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO: $x + y + z - (a+b+2) = 0$.

---