21 luglio 2014 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare le eventuali radici in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} kx & - & (a+1)y & + & z & = & 0 \\ (b+1)x & + & ky & & & = & a+1 \\ (a+b+2)x & & & + & z & = & k \end{array}\right. .$$

RISPOSTA: **Caso** $a \neq b$**.** Se $k \neq a+1, b+1$ lo spazio delle soluzioni contiene un solo punto. Se $k = a+1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = b+1$ lo spazio delle soluzioni è vuoto.

Caso $a = b$**.** Se $k \neq a+1$ lo spazio delle soluzioni contiene un solo punto. Se $k = a+1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10-a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 10-b & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (a-10) \cdot (10-b)$.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((a+1)x + 2(a+1)y + z, (b+1)x + 2(b+1)y + z, 0\Big).$$

Caso $a \neq b$:

BASE Ker $T = \{(-2, 1, 0)\}$.

BASE Im $T = \{(1, 1, 0), (a + 1, b + 1, 0)\}$.

Caso $a = b$:

BASE Ker $T = \{(-1, 0, a + 1), (0, -1, 2(a + 1))\}$.

BASE Im $T = \{(1, 1, 0)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T_k(x, y, z) = \Big((10 - a + k)x + (10 - a)y, (10 - b)z, (10 - b)z\Big)$$

ammette una base spettrale.

RISPOSTA: T_k ammette una base spettrale se e solo se $k \neq a - 10, a - b$.

Esercizio 5 (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dalle due rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = (b-10)t, y = (a-10)t, z = (10 - b)t$ e $x = -t, y = -t, z = -t$, rispettivamente.

COSENO $= \frac{10-a}{\sqrt{2(10-b)^2+(10-a)^2}\sqrt{3}}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a + 1 - t & 0 & 0 \\ 0 & t - b - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $b \geq a$, la funzione non è mai un prodotto scalare. Se $b < a$, la funzione è un prodotto scalare se e solo se $b + 1 < t < a + 1$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, l'area del parallelogramma di vertici $P \equiv (-1, 0, b - 10)$, $Q \equiv (0, -1, a - 10)$, $R \equiv (-1, -1, 0)$, $S \equiv (0, 0, (a - 10) + (b - 10))$. (Si noti che $(P - R) + (Q - R) = (S - R)$.)

AREA DEL PARALLELOGRAMMA: $\sqrt{(10 - a)^2 + (10 - b)^2 + 1}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si trovi un vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che l'insieme $\{(10 - b, 10 - b, 10 - a), (10 - a, 0, b - 10), (x, y, z)\}$ risulti essere una base ortogonale per $\mathbb{R}^3$.

RISPOSTA: $(x, y, z) = \Big((10-b)^2, -(10-b)^2 - (10-a)^2, (10-a)(10-b)\Big)$.

Esercizio 9 (2 punti) Calcolare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $(2a+2, b+1, 0)$, $(2a+2, 0, b+1)$ e $(0, a+1, b+1)$.

EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO: $x+2y+2z-(2a+2b+4)=0$.
