15 settembre 2014 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare le eventuali radici in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (a+2)x - (k+1)y = -(a+2) \\ (k+1)x + (b+3)z = a+2 \\ x + (b+2)\cdot k\,y + (b+3)z = a+7 \end{cases}.$$

RISPOSTA: **Caso** $(a, b) = (1, 0)$ **o** $(a, b) = (0, 1)$**.** Se $k \neq 0, 5$ lo spazio delle soluzioni contiene un solo punto. Se $k = 5$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = 0$ lo spazio delle soluzioni è vuoto.

Caso $(a, b) \neq (1, 0), (0, 1)$**.** Se $k \neq 0, (a+2)(b+2) - 1$ lo spazio delle soluzioni contiene un solo punto. Se $k = 0, (a+2)(b+2)-1$ lo spazio delle soluzioni è vuoto.

Esercizio 2 (2 punti) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a+2 & b+1 & a+1 \\ 2 & 0 & 0 & b+3 \\ 2 & 0 & 0 & a+3 \\ 0 & b+1 & a+2 & b+2 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 2(a-b)(a+b+3)(a-b+1)$.

Esercizio 3 (2 punti) Calcolare una base per il nucleo e una base per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((10-a)x+4(10-b)y+2z, (10-b)x+4(10-a)y, (a-b)x+4(b-a)y-2z\Big).$$

BASE Ker $T = \{(-4(10-a), 10-b, 2(b-a)(20-a-b))\}$.

BASE Im $T = \{(10-a, 10-b, a-b), (2, 0, -2)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((t+1)x, (b+1)y, (a+1)x + tz\Big).$$

BASE SPETTRALE: $\Big\{(1, 0, a+1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\Big\}$.

Esercizio 5 (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo acuto formato dalle due rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = (a+2)t, y = (b+3)t, z = -(b+3)t$ e $x = 2t, y = t, z = t$, rispettivamente.

COSENO $= \frac{2(a+2)}{\sqrt{(a+2)^2+2(b+3)^2}\sqrt{6}}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} (t+a)^2 & -bt \\ -bt & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $a = 0$ oppure $b = 0$, la funzione non è mai un prodotto scalare. Se $a, b \neq 0$, la funzione è un prodotto scalare se e solo se $t > -\frac{a}{2}$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare, nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$, l'area del triangolo di vertici $P \equiv (2, a+5, a+7)$, $Q \equiv (12-b, 2, 14-b)$, $R \equiv (2, 2, 4)$.

AREA DEL TRIANGOLO: $\frac{\sqrt{3}}{2}(a+3)(10-b)$.

Esercizio 8 (2 punti) Si trovi un vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tale che l'insieme $\{(a+b+1, a+2, a+2), (a+2, -(a+b+1), 0), (x, y, z)\}$ risulti essere una base ortogonale per $\mathbb{R}^3$.

RISPOSTA: $(x, y, z) = \Big(-(a+b+1)(a+2), -(a+2)^2, (a+b+1)^2+(a+2)^2\Big)$.

Esercizio 9 (2 punti) Calcolare un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $(10-a, a+b+1, 0)$, $(10-a, 0, a+b+1)$ e $(0, 10-a, a+b+1)$.

EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO: $x + y + z - (b+11) = 0$.
