15/01/2004

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) *Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$. Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ definita ponendo $T(x, y, z, u, v) = (\alpha x + 3z + u + (\alpha + 1)v, -\beta x + \beta y + z + u + (1 - \beta)v, -x + 2y + 3z + u, -x + 3y + 5z + 2u + v)$.*
   a) *Calcolare le dimensioni di $\ker T$ e ImT utilizzando il rango della matrice associata a T rispetto alla base naturale e l'equazione dimensionale per le trasformazioni lineari. (5 punti)*
   b) *Si trovi una base di ImT e si dica se ImT contiene il vettore $(1, 1, 1, 1)$, motivando la risposta. (4 punti)*

2) *Si ponga $\gamma = 10 - a$ e $\delta = 10 - b$. Si consideri la trasformazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che $L(\gamma, 1, 0) = (1, 0, 0)$, $L(0, \gamma, \delta) = (0, 1, 0)$, $L(\delta^2, 0, \gamma) = (0, 0, 1)$.*
   a) *Dire se L ammette una base spettrale motivando la risposta. (5 punti)*
   (Suggerimento: si studi la trasformazione lineare L^{-1})
   b) *Se a è pari si calcolino, rispetto al riferimento cartesiano naturale, le coordinate di un punto di $\mathbf{R}^2$ che sia equidistante dalle rette di equazioni cartesiane $x = 0$, $y = 0$, $3x + 4y - (\gamma + \delta) = 0$. Se a è dispari si calcoli, rispetto al riferimento cartesiano naturale, un'equazione cartesiana dell'unico piano di $\mathbf{R}^3$ passante per il punto P di coordinate $(1, 1, 0)$, parallelo all'asse delle x ed ortogonale al piano di equazione $\gamma x + \delta y - z = 3$. (4 punti)*

SOLUZIONI

1) *Indichiamo con A la matrice associata a T rispetto alle basi naturali di $\mathbf{R}^5$ ed $\mathbf{R}^4$.*
   a) *Se $a = 1$ e $b = 1$ oppure $a = 2$ e $b = 0$ si ha che $\dim ImT = \rho(A) = 3$ e $\dim \ker T = 5 - \rho(A) = 2$. Altrimenti si ha che $\dim ImT = \rho(A) = 4$ e $\dim \ker T = 5 - \rho(A) = 1$.*
   b) *Se $a = 1$ e $b = 1$ oppure $a = 2$ e $b = 0$ si ha che una base di ImT è data dalla seconda, terza e quarta colonna di A, altrimenti dalle prime quattro colonne di A (o anche dalle ultime quattro). Si noti che, in realtà, essendo $ImT = \mathbf{R}^4$ per motivi dimensionali, una qualunque base di $\mathbf{R}^4$ è anche una base di ImT. Se $a = 1$ e $b = 1$ oppure $a = 2$ e $b = 0$ si ha che $\rho(A) = 3$ mentre il rango della matrice C che si ottiene aggiungendo ad A la colonna ${}^t(1, 1, 1, 1)$ è 4. Quindi il vettore $(1, 1, 1, 1)$ non appartiene a ImT. Altrimenti ImT, coincidendo con $\mathbf{R}^4$ per motivi dimensionali, contiene in particolare anche il vettore $(1, 1, 1, 1)$.*

2)
   a) *La matrice associata a L^{-1} rispetto alla base naturale è semplicemente*

$$\begin{pmatrix} \gamma & 0 & \delta^2 \\ 1 & \gamma & 0 \\ 0 & \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

   ed il suo polinomio caratteristico è dato da $(t-\gamma)^3 - \delta^3$. L'unico autovalore è dunque $\gamma+\delta$, di molteplicità geometrica 1. Quindi L^{-1} NON ammette una base spettrale. Perciò anche L NON ammette una base spettrale.
   b) *Caso a pari: in base alla formula della distanza fra un punto ed una retta in $\mathbf{R}^2$ il punto (x, y) cercato deve verificare le due condizioni $|x| = |y|$ e $|x| = |3x + 4y - (\gamma + \delta)|/5$. Sarà quindi sufficiente imporre le due condizioni $x = y$ e $5x = 3x + 4y - (\gamma + \delta)$, che portano al punto $((\gamma + \delta)/2, (\gamma + \delta)/2)$. Caso a dispari: sia $ax + by + cz + d = 0$ l'equazione cartesiana cercata. Dovrà essere $(a, b, c) \perp (1, 0, 0)$ e $(a, b, c) \perp (\gamma, \delta, -1)$. Si arriva così alle due condizioni $a = 0$ e $c = b\delta$. Possiamo perciò scegliere $(a, b, c) = (0, 1, \delta)$. Quindi l'equazione cercata sarà del tipo $y + \delta z + d = 0$, con d da determinare. Dovendo il piano passare per il punto P di coordinate $(1, 1, 0)$ si ottiene la condizione $1 + d = 0$, da cui si ricava $d = -1$. Un'equazione cartesiana del nostro piano sarà dunque $y + \delta z - 1 = 0$.*