15 Gennaio 2015 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (2k-2a-2)x + (2k-2a-2)u & = & 2 \\ (3k-3b-3)y + (k-b-1)z & = & k-b-1 \\ (3b+3-3k)y - (a+1)z & = & -(a+1) \\ (a+1-k)x - (b+1)u & = & k-a-b-3 \end{cases}.$$

RISPOSTA: **Caso** $a \neq b$**.** Se $k = a+1$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = b+1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = a+b+2$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2. Se $k \neq a+1, b+1, a+b+2$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Caso $a = b$**.** Se $k = a+1$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = 2a+2$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2. Se $k \neq a+1, 2a+2$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10-a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 10-b & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 10-b & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (10-a) \cdot (10-b)^2$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((a+1)x+(b+1)y-z, 2(a+1)x+2(b+1)y-2z, 3(a+1)x+3(b+1)y-3z\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\Big\{(1,0,a+1),\Big(-(a+1)(b+1),1+(a+1)^2,b+1\Big)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo dello spazio vettoriale dei polinomi reali in x di grado minore o uguale a 2 che manda ogni polinomio $p(x)$ nel polinomio $(a+1)x\cdot\frac{dp}{dx}(x+b+1)$.

BASE SPETTRALE $=\{1,x,x^2+2(b+1)x\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1=\Big((1,1),(1,-1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2=\Big((-1,10-a),(10-b,2)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}=\begin{pmatrix} \frac{8-b}{(10-a)(10-b)+2} & \frac{b-12}{(10-a)(10-b)+2} \\ \frac{11-a}{(10-a)(10-b)+2} & \frac{9-a}{(10-a)(10-b)+2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mapsto(x_1,x_2)\begin{pmatrix} t & a+1 \\ t & b+1-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $b\leq 2a+1$, la funzione non è mai un prodotto scalare. Se $b>2a+1$, la funzione è un prodotto scalare se e solo se $t=a+1$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A=\begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ b+1 & a+1 \end{pmatrix}$.

$$B=\begin{pmatrix} a+b+2 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro t la matrice $\begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ a-10 & t \end{pmatrix}$ ammette un solo autovalore reale.

RISPOSTA: $t=a+1\pm 2\sqrt{(10-a)(b+1)}$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(a,b,0)$ e ortogonale al piano di equazione

$$(10-a)x+y+(10-b)z=1.$$

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA: $x=(10-a)t+a, y=t+b, z=(10-b)t$.