26 Gennaio 2015 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso

GEOMETRIA E ALGEBRA T

(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (2k+2a-20)y + (2k+2a-20)z & = & -2 \\ (3k+3b-30)x + (k+b-10)u & = & 10-b-k \\ (30-3b-3k)x + (a-10)u & = & 10-a \\ (10-a-k)y + (b-10)z & = & 21-a-b-k \end{cases}.$$

RISPOSTA: **Caso** $a \neq b$**.** Se $k = 10-a$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = 10-b$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = 20-a-b$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2. Se $k \neq 10-a, 10-b, 20-a-b$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Caso $a = b$**.** Se $k = 10-a$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = 20-2a$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2. Se $k \neq 10-a, 20-2a$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ a+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b+1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 2(a+1) \cdot (b+1)^2$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((10-a)x + (10-a)y, x + 2y + z, (10-b)y + (10-b)z\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\Big\{(10-a,1,0),\Big(10-a,-(10-a)^2,-(10-a)^2(10-b)-(10-b)\Big)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali 2×2 che manda ogni matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ nella matrice $\begin{pmatrix} x & x-(11-a)y \\ z & z+(11-b)t \end{pmatrix}$.

BASE SPETTRALE $=\left\{\begin{pmatrix} 12-a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b-10 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1=\Big((a+4,2a+5),(2b+5,b+4)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2=\Big((1,2),(2,1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}=\begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 1 & b+2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} t+(10-b) & 10-a \\ 10-a & t-(10-b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $t>\sqrt{(10-a)^2+(10-b)^2}$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A=\begin{pmatrix} 10-a & 0 \\ 7 & -(b+1) \end{pmatrix}$.

$B=\begin{pmatrix} 10-a & 0 \\ 0 & -(b+1) \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} t & a-10 \\ 10-b & 0 \end{pmatrix}$ ammette un solo autovalore reale.

RISPOSTA: $t=\pm 2\sqrt{(10-a)(10-b)}$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(0,0,0)$ e parallela ai piani di rispettive equazioni $(a+1)x+y+(b+1)z=3$ e $(a+1)x-y+(b+1)z=3$.

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA: $x=(b+1)t, y=0, z=-(a+1)t$.
