16 Febbraio 2015 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (2k+2a+2)y + (2k+2a+2)t &= -2 \\ (4k-40+4b)x + (k-10+b)z &= k-10+b \\ (k+a+1)y + (10-b)t &= k+a+b-10 \\ (4k-40+4b)x + (a+1)z &= a+1 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k = -(a+1)$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = 10-b, 9-a-b, a-b+11$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k \neq -(a+1), 10-b, 9-a-b, a-b+11$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 & b+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b+1 & 0 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = -2((a+1)^2 - (b+1)^2)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x,y,z) = \Big((a+1)x+y+(b+1)z, (3a+3)x+3y+(3b+3)z, (-2a-2)x-2y+(-2b-2)z\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\Big\{(1, -(a+1), 0), \Big(-(a+1)(b+1), -(b+1), 1+(a+1)^2\Big)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ delle matrici reali 2×2 che manda ogni matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ nella matrice $\begin{pmatrix} 2x & ay+z \\ (a-b+11)y+(b-10)z & 2t \end{pmatrix}$.

BASE SPETTRALE $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b-a-11 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ dalla base $\mathcal{B}_1 = \big((a+1, 3a+6), (0, 30-3b)\big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \big((1,3), (0,3)\big)$ in $\mathbb{R}^2$.

$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 10-b \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 10-a & 2t^2+2 \\ 4t & b+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $(10-a)\cdot(b+1) > 16$ la funzione è un prodotto scalare per $t = 1$; se $(10-a)\cdot(b+1) \leq 16$ la funzione non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} b+1 & 0 \\ a+1 & -(10-a) \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} b+1 & 0 \\ 0 & -(10-a) \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -a-1 \\ b+1 & 2t \end{pmatrix}$ ammette due autovalori reali distinti.

RISPOSTA: La matrice ammette due autovalori reali distinti se e solo se $t < -\sqrt{(a+1)(b+1)}$ oppure $t > \sqrt{(a+1)(b+1)}$.

Esercizio 9 (1 punto) Determinare un vettore direttore $\mathbf{n}$ della retta ottenuta intersecando i piani

$$\Pi_1 : (10-a)x + y + (10-b)z = 2,$$
$$\Pi_2 : (10-a)x + 3y + (10-b)z = 6.$$

RISPOSTA: $\mathbf{n} = ((10-b), 0, -(10-a))$.
