15 giugno 2015 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (3k+30-3a)x+(3k+30-3a)t & = & -3 \\ (2k-2b-2)y+(k-1-b)z & = & k-1-b \\ (k+10-a)x+(b+1)t & = & k-a-b+8 \\ (2k-2b-2)y+(10-a)z & = & 10-a \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k = -(10-a)$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = b+1, 11-a+b, a+b-9$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k \neq -(10-a), b+1, a+b-9, 11-a+b$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a+1 & 0 & 10-b & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & 0 & 10-a & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = -2(a-b)(a+b-9)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x,y,z) = \Big(-x+(10-a)y+(10-b)z, -3x+(30-3a)y+(30-3b)z, 5x-(50-5a)y-(50-5b)z\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\Big\{(10-a,1,0), \Big(10-b, -(10-a)(10-b), 1+(10-a)^2\Big)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ dei polinomi di grado minore o uguale di 3 definito da $f(p(x)) := (10-a)x^2 \frac{d^2p}{dx^2}(x+b+1)$.

BASE SPETTRALE $=\{1, x, x^2, 2x^3+3(b+1)x^2\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((2a+2,0),(4,8b+8)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((1,2),(2,0)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 4(b+1) \\ a+1 & -2b \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 10-b & 3t^3-9t^2 \\ -9t+3 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA:Se $(10-b)\cdot(a+1) > 36$ la funzione è un prodotto scalare per $t=1$; se $(10-b)\cdot(b+1) \leq 36$ la funzione non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} a+19 & -18 \\ 29 & a-28 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & -(10-a) \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} 4t & -(2a+2)^2 \\ 10-b & 0 \end{pmatrix}$ **non** ammette autovalori reali.

RISPOSTA: $-(a+1)\sqrt{(10-b)} < t < (a+1)\sqrt{(10-b)}$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo θ compreso fra un vettore direttore della retta ottenuta intersecando i piani

$$\Pi_1 : (a+1)x+(b+1)y+z=1,$$

$$\Pi_2 : (3a+3)x+(3b+3)y+8z=8$$

e il vettore $v=(1,1,1)$.

RISPOSTA: $\cos\theta = \pm\frac{a-b}{\sqrt{3((a+1)^2+(b+1)^2)}}$.
