16 luglio 2015 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (-2k-20+2b)x + (-2k-20+2b)y & = & 6 \\ (4a+4-4k)z + (a+1-k)t & = & a+1-k \\ (k+10-b)x + (a+1)y & = & k-a-b+6 \\ (4a+4-4k)z + (10-b)t & = & 10-b \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k = b - 10$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = a + 1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = a + b - 9$ lo spazio delle soluzione ha dimensione 2. Se $k \neq b - 10, a + b - 9, a + 1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 & b+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 & a+1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = -2(a-b)(a+1)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big(-(b+1)x + (b+1)y, (10-a)y + (100-10a)z, x + 10z \Big).$$

BASE ORTOGONALE $= \Big\{ (-b-1, 0, 1), \Big((b+1), ((b+1)^2+1)(10-a), (b+1)^2 \Big) \Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado minore o uguale di 3 definito da $f(p(x)) := (10-b)x\frac{dp}{dx}(x+a+1)$.

BASE SPETTRALE $=\{1, x, x^2+2(a+1)x, 2x^3+12(a+1)x^2+15(a+1)^2x\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((a+4, 3a+4), (3b+4, b+4)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((1,3),(3,1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & b+1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 10-a & t^3-2 \\ 4t^2-5t & b+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA:Se $(10-a)(b+1) \leq 1$ la funzione non è mai un prodotto scalare; se $1 < (10-a)(b+1) \leq 36$ la funzione è un prodotto scalare per $t=1$; se $(10-a)(b+1) > 36$ la funzione è un prodotto scalare per $t = 1, 2$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} 3b+2a+5 & -6b-6a-12 \\ b+a+2 & -2b-3a-5 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} b+1 & 0 \\ 0 & -(a+1) \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -(a+1) \\ (10-b)^2 & 9t \end{pmatrix}$ ammette esattamente un solo autovalore reale.

RISPOSTA: $t = \pm\frac{2(10-b)}{9}\sqrt{a+1}$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo θ compreso fra un vettore direttore della retta ottenuta intersecando i piani

$$\Pi_1 : x+(b+1)y+(a+1)z = 2,$$
$$\Pi_2 : 8x+(3b+3)y+(3a+3)z = 7$$

e il vettore $v = (1,1,1)$.

RISPOSTA: $\cos\theta = \pm\frac{a-b}{\sqrt{3((a+1)^2+(b+1)^2)}}$.
