14 settembre 2015 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\left\{\begin{array}{lcc} (-3k+3b+3)x+(-3k+3b+3)z & = & 3 \\ (5a+5+5k)y+(a+1+k)t & = & a+1+k \\ (k-b-1)x+(a+1)z & = & a+b-k+1 \\ (5a+5+5k)y+(2a+b+3)t & = & 2a+b+3 \end{array}\right. .$$

RISPOSTA: Se $k = b+1$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = -a-1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = a+b+2$ lo spazio delle soluzione ha dimensione 2. Se $k \neq b+1, -a-1, a+b+2$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -a-1 & 0 & b-10 & 0 & a+1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a+1 & 0 & a+1 & 0 & 10-b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ a+1 & 0 & 10-b & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 4(a+1)^2(a+b-9)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale del sottospazio ottenuto intersecando il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo

$$T(x,y,z,w) = \Big(-x+(2a+2)y+(10-b)z+8w, -3x+(6a+6)y+(30-3b)z+24w\Big)$$

con il sottospazio $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = 0\}$.

BASE ORTOGONALE $=\Big\{(2a+2,1,0,0), \Big(10-b, -2(a+1)(10-b), 4(a+1)^2+1, 0\Big)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ dei polinomi reali in x di grado minore o uguale di 3 definito da $f(p(x)) := (a+1)x\frac{dp}{dx}(x) + x\frac{dp}{dx}(x+b+1)$.

BASE SPETTRALE =
$\{1, x, (a+2)x^2 + 2(b+1)x, 2(a+2)^2x^3 + 12(a+2)(b+1)x^2 + 3(b+1)^2(6+a)x\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \big((2-a, 58-5a), (-2b-4, 2b-8)\big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \big((1,5), (-2,2)\big)$ in $\mathbb{R}^2$.

$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 10-a & -2 \\ 4 & b+1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 10-b & t+2-t^3 \\ 2t^2 & 10-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $(10-a)(10-b) \leq 4$ la funzione non è mai un prodotto scalare; se $4 < (10-a)(10-b) \leq 64$ la funzione è un prodotto scalare per $t = \pm 1$; se $(10-a)(10-b) > 64$ la funzione è un prodotto scalare per $t = \pm 1, -2$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} -5a+6b-65 & -10a+10b-110 \\ 3a-3b+33 & 6a-5b+56 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & b-10 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} 8t & (a+1)^2 \\ (b-10) & 0 \end{pmatrix}$ non ammette alcun autovalore reale.

RISPOSTA: $-\frac{a+1}{4}\sqrt{10-b} < t < \frac{a+1}{4}\sqrt{10-b}$.

Esercizio 9 (1 punto) Determinare il coseno dell'angolo θ compreso fra il vettore $\mathbf{v} = (-1,1,1)$ e un vettore direttore $\mathbf{n}$ della retta ottenuta intersecando i piani di equazioni

$$\Pi_1 : (10-b)x + 2y + (10-a)z = 2,$$
$$\Pi_2 : (50-5b)x + 15y + (50-5a)z = 15.$$

$\cos\theta = \frac{20-a-b}{\sqrt{3\Big((10-a)^2+(10-b)^2\Big)}}$.
