18 gennaio 2016 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (2k+2a+2)y + (2k+2a+2)t & = & -2 \\ (4k-40+4b)x + (k-10+b)z & = & k-10+b \\ (k+a+1)y - (b-10)t & = & k+a+b-10 \\ (4k-40+4b)x + (a+1)z & = & a+1 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k = -(a+1)$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = 10-b, 9-a-b, a-b+11$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k \neq -(a+1), 10-b, 9-a-b, a-b+11$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & 1 & 0 & 10-b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10-b & 0 & 1 & 0 & 10-a \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 4(a-b)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale dell'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((ax + by + (a+b)z, (a+1)(x+z), (-a-1)(y+z)\Big).$$

BASE ORTOGONALE $= \Big\{(a, a+1, 0), \Big(b(a+1), -ab, -(a^2 + (a+1)^2)\Big)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 1}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ delle coppie di polinomi di grado minore o uguale di 1 definito da

$$f((p(x), q(x))) := \Big((a+1)(x+a+1)\frac{dp}{dx}(x), (b+1)(x+b+1)\frac{dq}{dx}(x)\Big).$$

BASE SPETTRALE $=\{(1,0), (x+a+1,0), (0,1), (0,x+b+1)\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2})$ del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((26-a, a+6), (16-2b, 24-2b)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((1,-1),(2,2)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 10-a & -4 \\ 8 & 10-b \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 10-a & t+1 \\ \frac{1}{t^2-t+1} & \frac{1}{b+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $a+b \geq 9$ la funzione non è mai un prodotto scalare; se $a+b<9$ la funzione è un prodotto scalare per $t=0$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} -4a+5b+45 & 10a-10b-110 \\ -2a+2b+22 & 5a-4b-54 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $B = \begin{pmatrix} b+1 & 0 \\ 0 & a-10 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} 0 & (10-b)^2 \\ (a-10) & \pi t^3 \end{pmatrix}$ ammette autovalori reali distinti.

RISPOSTA: $t < -\sqrt[3]{\frac{2(10-b)}{\pi}\sqrt{10-a}} \vee t > \sqrt[3]{\frac{2(10-b)}{\pi}\sqrt{10-a}}$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo θ centrato nel punto ottenuto intersecando l'asse z con il piano di equazione

$$\Pi : (a+1)x + (a+1)y + (a-b+11)z = (a+1)$$

e determinato dalle rette

$$r : \Pi \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}, \qquad s : \Pi \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0\}.$$

RISPOSTA: $\cos\theta = \frac{(a+1)^2}{(a+1)^2+(a-b+11)^2}$.
