

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 1}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ delle coppie di polinomi di grado minore o uguale di 1 definito da $f((p(x), q(x))) :=$

$$\left((10-a)(x-10+a) \frac{dp}{dx}(x-10+a), (10-b)(x-10+b) \frac{dq}{dx}(x-10+b) \right).$$

BASE SPETTRALE = $\{(1, 0), (x-10+a, 0), (0, 1), (0, x-10+b)\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = ((a+21, -40), (2b-8, -4b-4))$ alla base $\mathcal{B}_2 = ((1, 0), (2, -4))$ in \mathbb{R}^2 .

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} a+1 & -10 \\ 10 & b+1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \frac{10-a}{10-b} & t-1 \\ \frac{1}{t^2+t+1} & \frac{1}{t^2-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su \mathbb{R}^2 e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: È un prodotto scalare se e solo se $t = \sqrt[3]{2}$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} 10b-6a+4 & 15b-15a \\ 4a-4b & 10a-6b+4 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $B = \begin{pmatrix} 4a+4 & 0 \\ 0 & 4b+4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} \pi^2 t^2 & (a+1)^2 \\ 4(b-10) & 0 \end{pmatrix}$ non ammette autovalori reali.

RISPOSTA: $-\frac{2}{\pi} \sqrt{(a+1)\sqrt{10-b}} < t < \frac{2}{\pi} \sqrt{(a+1)\sqrt{10-b}}$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo θ centrato nel punto P ottenuto intersecando l'asse z con il piano di equazione

$$\Pi : (a+1)(x+y) + (a+b+2)z = a+1$$

e determinato dalle retta $r = \Pi \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ e dalla retta s passante per il punto P e il punto $Q = (0, -1, 0)$.

RISPOSTA: $\cos \theta = \pm \frac{(a+b+2)^2 - (a+1)^2}{(a+b+2)^2 + (a+1)^2}$.
