15 febbraio 2016 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (a-k-10)x + (3k-4b-3a+26)t = 4a+4b-4k+29 \\ (6b-6k+6)y + (4a-b+k-41)z = 4a-b+k-41 \\ (k-a+10)x + (4k-4b-4)y + (20-2a)z + (b+1)t = k-b-3a+12 \\ (2k-2b-2)y + (10-a)z = (10-a) \end{cases} .$$

RISPOSTA: Se $k = a-10, a+b-9$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = 11-a+b, b+1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k \neq a-10, b+1, 11-a+b, a+b-9$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+b+1 & b+1 & a+1 & b+1 & a+1 \\ 0 & a+b+1 & b+1 & a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a-1 & b+1 & a+1 & 0 \\ -b-1 & a+1 & -b-1 & a+1 & -b-1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = -b(b+1)(a+1)(2a+b+2)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale del nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito ponendo $T(x, y, z, t) =$

$$\Big((a+1)x-(b+1)y, 10(ax-by)+10(x-y), (b+1)y-(a+1)z+(a+1)t, (-by+az-at)-(y-z+t)\Big).$$

B. ORT. =
$$\Big\{(b+1, a+1, b+1, 0), \Big(-(b+1)^2, -(b+1)(a+1), (b+1)^2+(a+1)^2, 2(b+1)^2+(a+1)^2\Big)\Big\}.$$

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbb{R}$ definito da

$$f((p(x), \alpha)) := \left((x+a+1)\frac{dp}{dx}(x), -(a+1)\alpha\right).$$

BASE SPETTRALE $=\big\{(1,0), (x+a+1, 0), ((x+a+1)^2, 0), (0,1)\big\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \big((30-3a, a-2), (0, 20-2b)\big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \big((3,-1), (0,2)\big)$ in $\mathbb{R}^2$.

$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 10-a & 0 \\ 4 & 10-b \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \frac{a+1}{t(b+1)} & \frac{2}{e^t+1} \\ e^{2t} - e^t + 1 & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

risulti definita e sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} 2a-b+1 & a-b \\ 2(b-a) & 2b-a+1 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & b+1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} t & -(a+1) \\ (b+1) & -t \end{pmatrix}$ ammette due autovalori reali coincidenti.

RISPOSTA: $t = \pm\sqrt{(a+1)(b+1)}$.

Esercizio 9 (1 punto) Determinare un vettore direttore $\mathbf{n}$ della retta ottenuta intersecando il piano

$$\Pi_1 : x + y + z = a + 1$$

e il piano Π_2 passante per i punti $P_1 = (a+1, 0, 0), P_2 = (0, -1, 0)$ e $P_3 = (0, 0, a+1)$. RISPOSTA: $\mathbf{n} = (-1, 0, 1)$.
