13 Giugno 2016 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (a+2)x + y + z + (k-b-1)u = b+1 \\ x + y + z = 0 \\ x + (b+2)y + z = 0 \\ (a+2)x + y + z + (2k-2b-2)u = 2b+2 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k = b+1$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k \neq b+1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b+1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = \left((a+1)(b+1)-1\right)^2$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale del nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$T(x,y,z) = \Big(1+(b-a)(b+1)\Big)x + (2a-b+1)y + \Big((a+1)(b+1)+1\Big)z.$$

B. ORT. $= \{(a+1, -1, a-b), (1, b+1, -1)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2[x]$ definito da

$$f\Big(p(x)\Big) := (b+1+x)\frac{dp}{dx}(x).$$

BASE SPETTRALE $=\big\{1, b+1+x, (b+1+x)^2\big\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((27-3a, a-1), (0, 20-2b)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((3,-1), (0,2)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

Se $a \neq 9$ si ha $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 9-a & 0 \\ 4 & 10-b \end{pmatrix}$. Se $a = 9$ la matrice non esiste.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} b+1 & -t \\ -t & a+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: È un prodotto scalare se e solo se $|t| < \sqrt{(a+1)(b+1)}$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} 10-b & 0 \\ 1 & a-10 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} 10-b & 0 \\ 0 & a-10 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} t & 3b+3 \\ 0 & 2a+2-t \end{pmatrix}^{999}$ ammette due autovalori reali coincidenti.

RISPOSTA: $t = a+1$.

Esercizio 9 (1 punto) Determinare l'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ai piani di equazioni $(10-a)x + y - z = 0$ e $x - (10-b)y + z = 5$ e passante per il punto $(0,0,0)$.

RISPOSTA: $(b-9)x + (a-11)y + \Big((10-a)(b-10) - 1\Big)z = 0$.
