26 luglio 2016 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (a+1)x + (b+1)y + z - u = k \\ (a+1)x + ky + z + u = b+1 \\ (b+1-k)y - 2u = -k - b - 1 \\ 2(a+1)x + (b+1+k)y + 2z = b+1+k \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k = 0$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2. Se $k \neq 0$ lo spazio delle soluzioni è vuoto.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10-b & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10-b \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = \left((10-a)(10-b)\right)^2$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale dell'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((a+1)x - (5a+5)z, x + (b+1)y - (2b+7)z, y - 2z\Big).$$

B. ORT. $= \Big\{(a+1, 1, 0), \Big(-(b+1)(a+1), (b+1)(a+1)^2, (a+1)^2 + 1\Big)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2[x]$ definito da

$$f\Big(p(x)\Big) := (10-a+x)^2 \frac{d^2p}{dx^2}(x).$$

BASE SPETTRALE $=\big\{1, x, (10-a+x)^2\big\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((4a+4,0),(16+b,32+4b)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((4,0),(1,4)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ 0 & 8+b \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} a+1 & e^{2t} \\ 2e^t-1 & b+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $(a,b) \neq (0,0)$ la funzione è un prodotto scalare se e solo se $t=0$, altrimenti non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} a+1 & -45 \\ 0 & b-10 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & b-10 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} 4b+4-2t & 0 \\ -5a-5 & 2t \end{pmatrix}^{45}$ ammette due autovalori reali distinti.

RISPOSTA: $t \neq b+1$.

Esercizio 9 (1 punto) Determinare l'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ai piani di equazioni $(a+1)x+(a+1)y+z=10$ e $-(a+1)y-(b+1)z=25$ e passante per il punto $(0,0,-1)$.

RISPOSTA: $bx-(b+1)y+(a+1)z=-(a+1)$.
