12 settembre 2016 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (10-a)x + (10-b)y + z - u = k \\ (10-a)x + ky + z + u = 10 - b \\ (10-b-k)y - 2u = -k - 8 + b \\ 2(10-a)x + (10-b+k)y + 2z = 10 - b + k \end{cases}.$$

RISPOSTA: Se $k = 1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2. Se $k \neq 1$ lo spazio delle soluzioni è vuoto.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 10 & 10 & 100 \\ 0 & a+1 & 100 & 10 \\ 0 & 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & b+1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = ((a+1)(b+1))^2$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale del nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x,y,z) = \Big((a+1)x+(b+1)y-z, (5ax+5by-5z)+5(x+y), \pi^2(ax+by)+\pi^2(x+y-z)\Big).$$

B. ORT. $= \Big\{(1, 0, a+1), \Big(-(b+1)(a+1), 1+(a+1)^2, b+1\Big)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2[x]$ definito da

$$f\Big(p(x)\Big) := (b+1+x)^2 \frac{d^2p}{dx^2}(x).$$

BASE SPETTRALE $=\big\{1, x, (b+1+x)^2\big\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((a+1, -a-1), (-3b-2, -1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((1, -1), (-3, 0)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & b+1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 10-a & 2t \\ 1+t & b-10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} a-10 & 0 \\ \pi^2 & b+1 \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} a-10 & 0 \\ 0 & b+1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} 40-4b-5t & -10a-10 \\ 0 & 5t \end{pmatrix}$ ammette almeno un autovalore reale.

RISPOSTA: Per tutti i valori di t.

Esercizio 9 (1 punto) Determinare l'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale al piano di equazione $(10-a)x + (10-b)y = 3$ e passante per i punti $(0, 0, -1)$ e $(1, 0, 0)$.

RISPOSTA: $(10-b)x - (10-a)y - (10-b)(z+1) = 0$.
