16/12/2002

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u

$$\begin{cases} [(a+2)-(a+1)t]x+y+z &= 2bt-1 \\ x+y+z &= 2bt-1 \\ (1-t)x+y+(t+1)z-tu &= 2(b-1)t \\ 2tx+tu &= 0 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t. *(6 punti)*

b) Si considerino in IR^3 il piano π di equazione cartesiana $(10-a)x+(10-b)y+z-(10-a)^2-(10-b)^2-1=0$ e la retta r passante per il punto $(0,0,0)$ e ortogonale a π. Si calcoli il punto intersezione fra π e r. *(3 punti)*

2) Si consideri l'endomorfismo $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ associato, rispetto alla base canonica, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+b+12 & a-b+10 \\ a-b+10 & a+b+12 \end{pmatrix}.$$

a) Si trovi, se esiste, una base spettrale per T. *(6 punti)*

b) Si dica (motivando la risposta) se A è simile alla matrice $B = \begin{pmatrix} 2b+2 & 1 \\ 1 & 2a+22 \end{pmatrix}$. *(3 punti)*

SOLUZIONI

1)

a) Dette rispettivamente A_t e C_t la matrice completa e incompleta del sistema si ha $\rho(A_t) = \begin{cases} 2 \text{ se } t=0 \\ 3 \text{ se } t=1 \\ 4 \text{ altrimenti} \end{cases}$ e $\rho(C_t) = \begin{cases} 3 \text{ se } t=0 \\ 3 \text{ se } t=1 \\ 4 \text{ altrimenti} \end{cases}$. Dunque il sistema ammette soluzione se e solo se $t \neq 0$. Se $t \neq 0, 1$ la soluzione è unica, se $t = 1$ la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1.

b) L'equazione parametrica di r è $P = t(10-a, 10-b, 1)$. Ponendo $x = (10-a)t$, $y = (10-b)t$, $z = t$ nell'equazione di π si ottiene $t = 1$ e dunque il punto intersezione cercato è $(10-a, 10-b, 1)$.

2)

a) Il polinomio caratteristico è $(\lambda-(a+b+12))^2-(a-b+10)^2$. Gli autovalori sono $2b+2$ e $2a+22$. Inserendoli nella matrice caratteristica si calcolano i rispettivi autospazi: $x+y=0$ e $x-y=0$. Una base spettrale è dunque data da $B = ((1,-1),(1,1))$.

b) Le due matrici non sono simili perché non hanno lo stesso determinante.