17 gennaio 2005

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u

$$\begin{cases} x & +4y & -z & -4u & = & 1 \\ -x & +(t-a-4)y & +z & +(a+4-t)u & = & t-a-1 \\ 2x & +8y & +(t-b-2)z & +(b-8-t)u & = & a-b+2 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(6 punti)*

b) Calcolare una base ortogonale di $I\!R^3$ che contenga il vettore $(10-a, b+1, 1)$. *(3 punti)*

2)

a) Si consideri l'endomorfismo $T_k : I\!R^3 \to I\!R^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 10-b & 0 \\ 0 & 10-b-k & 0 \\ 0 & 10-a & 10-b \end{pmatrix}.$$

Determinare per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile. *(6 punti)*

b) Scrivere un'equazione cartesiana del piano di $I\!R^3$ che passa per i tre punti $A = (a+1, 0, 0)$, $B = (0, 10-b, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$, rispetto al riferimento cartesiano naturale. *(3 punti)*

SOLUZIONI

1)

a) Dette rispettivamente A_t e C_t la matrice completa e incompleta del sistema si ha

CASO $a \neq b$:
$\rho(A_t) = 3$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t \neq a, b$ ($\dim Sol(S) = 4 - 3 = 1$),
$\rho(A_t) = 2$ e $\rho(C_t) = 2$ se $t = a$ ($\dim Sol(S) = 4 - 2 = 2$),
$\rho(A_t) = 2$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t = b$ (nessuna soluzione).

CASO $a = b$:
$\rho(A_t) = 3$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t \neq a$ ($\dim Sol(S) = 4 - 3 = 1$),
$\rho(A_t) = 1$ e $\rho(C_t) = 1$ se $t = a$ ($\dim Sol(S) = 4 - 1 = 3$).

b) Una base come quella cercata è la seguente: $\big((10-a, b+1, 1), (0, -1, b+1), ((b+1)^2+1, (a-10)(b+1), a-10)\big)$. Per trovare una base siffatta si può ortogonalizzare una base qualunque che contenga il vettore $u = (10-a, b+1, 1)$ con il metodo di Gram-Schmidt oppure, più semplicemente, calcolare un vettore v ortogonale al vettore u e prendere come terzo vettore della base il vettore $u \wedge v$.

2)

a) Poniamo $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Il polinomio caratteristico è $p(t) = (t-k)(t-(\beta-k))(t-\beta)$. Gli autovalori sono $k, \beta-k, \beta$. Per $k \neq 0, \frac{\beta}{2}, \beta$ gli autovalori sono tutti distinti e dunque T_k è diagonalizzabile.

Esaminiamo i tre casi $k = 0$, $k = \frac{\beta}{2}$ e $k = \beta$.

Se $k = 0$ il polinomio caratteristico è $t(t-\beta)^2$ ed è sufficiente verificare se la molteplicità geometrica dell'autovalore β è 2. Si ha $\rho(\beta I - A_0) = 2$ e dunque $mg(\beta) = 3 - 2 = 1 < ma(\beta) = 2$. Quindi T_0 non è diagonalizzabile.

Se $k = \frac{\beta}{2}$ il polinomio caratteristico è $(t-\frac{\beta}{2})^2(t-\beta)$ ed è sufficiente verificare se la molteplicità geometrica dell'autovalore $\frac{\beta}{2}$ è 2. Si ha $\rho(\frac{\beta}{2}I - A_{\frac{\beta}{2}}) = 2$ e dunque $mg(\frac{\beta}{2}) = 3 - 2 = 1 < ma(\frac{\beta}{2}) = 2$. Quindi $T_{\frac{\beta}{2}}$ non è diagonalizzabile.

Se $k = \beta$ il polinomio caratteristico è $t(t-\beta)^2$ ed è sufficiente verificare se la molteplicità geometrica dell'autovalore β è 2. Si ha $\rho(\beta I - A_\beta) = 1$ e dunque $mg(\beta) = 3 - 1 = 2 = ma(\beta)$. Quindi T_β è diagonalizzabile.

b) Un'equazione cartesiana del piano cercato è $(10-b)x + (a+1)y + (a+1)(10-b)z - (a+1)(10-b) = 0$ (tutte le altre si trovano moltiplicando questa equazione per una costante non nulla).