9 Gennaio 2017 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso

GEOMETRIA E ALGEBRA T

(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} x - y + 3z + t = 1 \\ x + by + 3z + t = b + 2 \\ 2x - 2y + (k - a + 5)z + 2t = 2 \\ -x + y - 3z + (k - b - 2)t = -1 \end{cases} .$$

RISPOSTA: $\boxed{\text{CASO } a \neq b}$ Il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile per ogni k. Se $k \notin \{a+1, b+1\}$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (la soluzione è unica). Se $k = a+1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = b+1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1.

$\boxed{\text{CASO } a = b}$ Il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile per ogni k. Se $k \neq a + 1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (la soluzione è unica). Se $k = a + 1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 10-b & a-10 & b-10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10-b & 10-a & 10-b & 10-a \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 4(10 - a)^2$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f(x, y, z) = \Big(g(x, y, z), 2g(x, y, z), -g(x, y, z)\Big)$$

con $g(x,y,z) = \Big((10-b)(b-a)-1\Big)x + (a+b-20)y + \Big((10-a)(b-a)+1\Big)z$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

BASE ORT. $=\{(10-a,-1,b-10),(1,b-a,1)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z) =$

$$\Big((b-a)x-(b+1)y-(a+1)z, -(a+1)x-(a+1)z, (2a-b+1)x+(b+1)y+2(a+1)z\Big)$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

BASE SPETTRALE $=\{(-1,-1,2),(1,1,-1),(1,0,-1)\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2})$ del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((1,10-a),(10-b,0)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((1,10-a),(10-b,-1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{10-b}{1+(10-a)(10-b)} \\ 0 & \frac{(10-a)(10-b)}{1+(10-a)(10-b)} \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & (a+1)^2 \\ (t-b-1)^2 & 625 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA:

$\boxed{\text{CASO } a < 4}$ È un prodotto scalare se e solo se $t \in \{a+b+2, b-a\}$.

$\boxed{\text{CASO } a \geq 4}$ Non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 10-a & 1 \\ -2 & 10-b \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{10-b}{(10-a)(10-b)+2} & -\frac{1}{(10-a)(10-b)+2} \\ \frac{2}{(10-a)(10-b)+2} & \frac{10-a}{(10-a)(10-b)+2} \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si determini per quali punti P della retta di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $\{x = 1, y = 1$ l'area del triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e P ha area $\sqrt{(a+1)(b+1)}$.

RISPOSTA: $P = \Big(1, 1, \pm\sqrt{\frac{4(a+1)(b+1)-1}{2}}\Big)$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo θ fra le due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni parametriche

$$r : \{x = (10-a)t + 7, y = -t, z = t + 1 \ ,$$

$$s : \{x = 3t + 7, y = 3(10-b)t, z = 1 \ .$$

RISPOSTA: $\cos\theta = \frac{b-a}{\sqrt{(10-a)^2+2}\sqrt{(10-b)^2+1}}$.
