23 Gennaio 2017 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - t = a \\ x + (b+5)y + 2z - t = a + 3 \\ 2x + 6y + (k + a + 6) - 2t = 2a \\ -x - 3y - 2z + (k + b + 3)t = -b \end{cases} .$$

RISPOSTA: $\boxed{\text{CASO } a \neq b}$ Se $k \notin \{-a-2, -b-2\}$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (la soluzione è unica). Se $k = -a-2$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = -b-2$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è impossibile.

$\boxed{\text{CASO } a = b}$ Il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile per ogni k. Se $k \neq -a-2$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (la soluzione è unica). Se $k = -a-2$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 10-b & 10-a & b-10 & a-10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ b+2 & a+2 & 2-b & 2-a \end{pmatrix} .$$

RISPOSTA: $\det A = 40(b-a)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f(x, y, z) = \Big(g(x, y, z), -g(x, y, z), g(x, y, z)\Big)$$

con $g(x,y,z) = \Big(-(a+5)(a+b)-1\Big)x + (a-b+10)y + \Big((b-5)(a+b)+1\Big)z$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

BASE ORT. $=\{(b-5,-1,a+5),(1,a+b,1)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z) =$

$$\Big(x+(a+1)y+(b+1)z, (b+1)y, x+(a-b)y+(b+1)z\Big)$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

BASE SPETTRALE $=\Big\{(-b-1,0,1), \Big((b-a)(b+1), b+1, b^2-ab-a-1\Big), (1,0,1)\Big\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((9-a,1),(1,0)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((b+10,1),(a-9,-1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a+b+1} \\ -1 & \frac{1}{a+b+1} \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 6 & (b+1)^2 \\ (t-a)^2 & 216 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA:

$\boxed{\text{CASO } b < 5}$ È un prodotto scalare se e solo se $t \in \{a+b+1, a-b-1\}$.

$\boxed{\text{CASO } b \geq 5}$ Non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & -(b+1) \\ a+1 & b+1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(a+1)} & \frac{1}{2(a+1)} \\ -\frac{1}{2(b+1)} & \frac{1}{2(b+1)} \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Data la retta di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x+y+kz+1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

determinare per quale valore di k essa risulta parallela al piano di equazione $(a+1)x+(b+1)y+z=0$.

RISPOSTA: $k = \frac{2}{a+b+2}$

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo θ fra le due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni parametriche

$$r : \{x = (10-a)t + 2, y = 2t + 1, z = t\ ,$$

$$s : \{x = 2t + 2, y = 1, z = (10-b)t\ .$$

RISPOSTA: $\cos\theta = \pm\frac{30-2a-b}{\sqrt{(10-a)^2+5}\sqrt{(10-b)^2+4}}$.
