**20 Febbraio 2017 Matricola: a = , b =**

# Seconda prova dell'esame del corso
## GEOMETRIA E ALGEBRA T
## (Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri $a$ e $b$ rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

**Esercizio 1 (3 punti)** Dire per quali valori del parametro reale $k$ il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite $x, y, z, t$ è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + y - z + 3t = 2a \\ x + (a+1)y + z + 2t = a + 1 \\ 4x + 2y + (k - 2b - 3)z + 6t = 4a \\ 2x + y - z + (k - 2a + 2)t = 2b \end{cases}.$$

RISPOSTA: $\boxed{\text{CASO } a \neq b}$ Se $k \notin \{2a+1, 2b+1\}$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (la soluzione è unica). Se $k = 2b+1$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = 2a + 1$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è impossibile.

$\boxed{\text{CASO } a = b}$ Il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile per ogni $k$. Se $k \neq 2a + 1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (la soluzione è unica). Se $k = 2a + 1$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

**Esercizio 2 (1 punto)** Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ a+1 & b+1 & a-1 & b-1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10-a & 10-b & 10-a & 10-b \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 4(10 - a)$.

**Esercizio 3 (3 punti)** Calcolare una base ortogonale per <u>l'immagine</u> della trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f(x, y, z) = \Big((10 - b)x + y + (11 - b)z, x + z, (10 - a)y + (10 - a)z\Big)$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

BASE ORT. $= \big\{(10 - b, 1, 0), (1, b - 10, (10 - a)((10 - b)^2 + 1))\big\}$.

**Esercizio 4 (3 punti)** Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) =$

$$\Big((a-11)x + (b-11)y + z, (a-11)y, (a-11)x + (b-a)y + z\Big)$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

BASE SPETTRALE $=\{(1, 0, 11-a), (12-b, 1, 11-b), (1, 0, 1)\}$.

---

**Esercizio 5 (2 punti)** Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((a+1, 1), (0, 1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((20-b, 1), (a+1, 1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a+1}{a+b-19} \\ 1 & \frac{b-20}{a+b-19} \end{pmatrix}$.

---

**Esercizio 6 (2 punti)** Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale $t$ per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 32 & (a+b+1)^2 \\ (t-b)^2 & 128 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA:

$\boxed{\text{CASO } a+b+1 < 8}$ È un prodotto scalare se e solo se $t \in \{a + 2b + 1, -a-1\}$.

$\boxed{\text{CASO } a+b+1 \geq 8}$ Non è mai un prodotto scalare.

---

**Esercizio 7 (1 punto)** Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 10-b \\ a-10 & 10-b \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2(10-a)} & -\frac{1}{2(10-a)} \\ \frac{1}{2(10-b)} & \frac{1}{2(10-b)} \end{pmatrix}$.

---

**Esercizio 8 (2 punti)** Dati la retta di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x - y + (a+1)z + \frac{\sqrt{a+1}}{2} = 0 \\ x + by + 3 = 0 \end{cases}$$

e il piano di equazione

$$4x - 4y + k^2 z + k = 0,$$

determinare per quali valori di $k$ essi sono paralleli disgiunti e quando il piano contiene la retta.

RISPOSTA: Se $k = 2\sqrt{a+1}$, il piano contiene la retta.
Se $k = -2\sqrt{a+1}$, il piano e la retta sono paralleli disgiunti.

---

**Esercizio 9 (1 punto)** Calcolare il coseno dell'angolo $\theta$ fra le due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni parametriche

$$r : \{x = (b+1)t, y = t, z = 2t - a - 1 \ ,$$

$$s : \{x = t + 1, y = 0, z = (a+1)t \ .$$

RISPOSTA: $\cos\theta = \pm \frac{2a+b+3}{\sqrt{(b+1)^2+5}\sqrt{(a+1)^2+1}}$.

---