19 Giugno 2017 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + t = a \\ x + (k-b)y - 2z + t = 2a + 1 \\ 3x + 9y + (k-a-7)z + 3t = 3a \\ 2x + 6y - 4z + (k-b+1)t = 2b \end{cases}.$$

RISPOSTA: $\boxed{\text{CASO } a \neq b}$ Se $k \notin \{a+1, b+1, b+3\}$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (la soluzione è unica). Se $k = a+1$ con $a = b+2$ non ci sono soluzioni. Se $k = a+1$ e $a \neq b+2$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = b+1$ oppure $k = b+3$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è impossibile.

$\boxed{\text{CASO } a = b}$. Se $k \notin \{a+1, b+3\}$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (la soluzione è unica). Se $k = a+1$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2. Se $k = b+3$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è impossibile.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a-10 & b-10 & a-10 & b-10 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 1+b & 1+a & 1-b \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (a-b)(2b-20)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f(x,y,z) = \Big(g(x,y,z), -2g(x,y,z), 3g(x,y,z)\Big)$$

con

$$g(x,y,z)=\Big(-(b+2)(a+b+1)-1\Big)x+(3-a+b)y+\Big((a-1)(a+b+1)+1\Big)z$$

per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

BASE ORT. $=\{(a-1,-1,b+2),(1,a+b+1,1)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x,y,z)=$

$$\Big(x+(b-a)y+(a+2)z,(a+2)y,x+(b+2)y+(a+2)z\Big)$$

per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

BASE SPETTRALE $=\{(-a-2,0,1),(-b-2,1,-b-1),(1,0,1)\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1=\Big((1,0),(1,b+1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2=\Big((1,b+1),(-1,a+10)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2})=\begin{pmatrix}\frac{10+a}{a+b+11} & 1\\ -\frac{b+1}{a+b+11} & 0\end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mapsto(x_1,x_2)\begin{pmatrix}12 & (2a+b+10)^2\\ (t-a)^2 & 108\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare l'inversa della matrice

$$A=\begin{pmatrix}a+1 & a+1\\ 1-2b & 10-b\end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{10-b}{(a+1)(b+9)} & -\frac{1}{b+9}\\ \frac{2b-1}{(a+1)(b+9)} & \frac{1}{b+9}\end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Data la retta di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana

$$\begin{cases}x+y+(2b+2)z+1=0\\ x+2y=0\end{cases}$$

determinare per quali valori di k essa risulta parallela al piano di equazione $2x+2y+(k^2-4a)z+2=0$.

RISPOSTA: $k=\pm2\sqrt{a+b+1}$

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo θ fra le due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni parametriche

$$r : \{x = (a+1)t + 1, y = t + 2, z = 3t \ ,$$

$$s : \{x = 2t + 1, y = (10 - b)t + 2, z = 0 \ .$$

RISPOSTA: $\cos\theta = \pm\frac{2a-b+12}{\sqrt{(a+1)^2+10}\sqrt{(10-b)^2+4}}$.
