17 Luglio 2017 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, t è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 2t = b \\ 4x + (k-a+3)y - 4z + 4t = 2a \\ 6x + 3y + (k-b-5)z + 6t = 3a \\ 2x + y - 2z + (k-a-1)t = b \end{cases} .$$

RISPOSTA: $\boxed{\text{CASO } a \neq b}$ Se $k \notin \{a+3, a-1, b-1\}$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (la soluzione è unica). Se $k = a+3$ con $a = b-4$ non ci sono soluzioni. Se $k = a+3$ e $a \neq b-4$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = a-1$ oppure $k = b-1$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è impossibile.

$\boxed{\text{CASO } a = b}$. Se $k \notin \{a+3, b-1\}$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (la soluzione è unica). Se $k = a+3$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = b-1$, il sistema $\mathbf{S}_k$ è possibile e lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-b & 0 & 0 & 10-b \\ 0 & 10-b & 0 & 0 \\ 10-b & 0 & 10-a & 10-b \\ 0 & 0 & 10-b & 10-a \end{pmatrix} .$$

RISPOSTA: $\det A = (10-b)^2(10-a)^2$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$f(x, y, z) = \Big(g(x, y, z), -2g(x, y, z), 3g(x, y, z)\Big)$$

con

$$g(x, y, z) = \Big(-(10-b)(20-a-b)-1\Big)x+(a-b)y+\Big((10-a)(20-a-b)+1\Big)z$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

BASE ORT. $=\{(10-a, -1, 10-b), (1, 20-a-b, 1)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito ponendo $f(x, y, z) =$

$$\Big((-b-1)x + (b+4)z, (a+3)y + (a+3)z, y + z\Big)$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

BASE SPETTRALE $=\{(b+4, -b-1, b+1), (1, 0, 0), (b+4, (a+3)(a+b+5), a+b+5)\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((a+b+1, 0), (1, 1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((a+1, a+1), (0, b+1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} \frac{a+b+1}{a+1} & \frac{1}{a+1} \\ -\frac{a+b+1}{b+1} & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 16 & (a+1)^3 \\ (t-b)^3 & 256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: Se $a < 3$, è un prodotto scalare per $t = a + b + 1$. Se $a \geq 3$ non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-b & 10-b \\ a+1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a-1}{2b-20} & \frac{1}{2} \\ -\frac{a+1}{2b-20} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Dati i piani di equazione

$$(a+1)x+(b+1)y+k^2z+1=0 \quad \text{e} \quad (b+1)x+(a+1)y-9z=0,$$

determinare per quale valore di k essi risultano perpendicolari.

RISPOSTA: $k=\pm\frac{\sqrt{2(a+1)(b+1)}}{3}$

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare il coseno dell'angolo θ fra le due rette incidenti di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni parametriche

$$r:\{x=(a+2)t-1, y=(10-b)t+1, z=0\ ,$$

$$s:\{x=t-1, y=(10+b)t+1, z=3t\ .$$

RISPOSTA: $\cos\theta=\pm\frac{a-b^2+102}{\sqrt{(a+2)^2+(10-b)^2}\sqrt{(10+b)^2+10}}$.
