2 Ottobre 2017 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (2k+2b-20)y + (2k+2b-20)z & = & -2 \\ (3k+3a-30)x + (k+a-10)u & = & 10-a-k \\ (30-3a-3k)x + (b-10)u & = & 10-b \\ (10-b-k)y + (a-10)z & = & 21-a-b-k \end{cases}.$$

RISPOSTA: **Caso $a \neq b$.** Se $k = 10 - b$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = 10 - a$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k = 20 - a - b$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2. Se $k \neq 10 - a, 10 - b, 20 - a - b$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Caso $a = b$. Se $k = 10 - a$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = 20 - 2a$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2. Se $k \neq 10 - a, 20 - 2a$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a+1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (a+1)^2 \cdot (b+1)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big(x + (a+1)y + (a+2)z, (b+1)x + (b+1)z, y + z\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\Big\{(1,b+1,0),\Big((a+1)(b+1)^2,-(a+1)(b+1),1+(b+1)^2\Big)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo $F(x,y,z)=\Big((a+1)x,(b+11)y,x\Big)$.

BASE SPETTRALE $=\Big((a+1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\Big)$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1=\Big((b+4,2b+5),(2a+5,a+4)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2=\Big((1,2),(2,1)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}=\begin{pmatrix} b+2 & 1 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mapsto(x_1,x_2)\begin{pmatrix} t+(10-a) & 10-b \\ 10-b & t-(10-a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $t>\sqrt{(10-b)^2+(10-a)^2}$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A=\begin{pmatrix} a+7 & 11 \\ 0 & -b-1 \end{pmatrix}$.

$B=\begin{pmatrix} a+7 & 0 \\ 0 & -b-1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice $\begin{pmatrix} t & 0 \\ b-10 & 10-a \end{pmatrix}$ ammette un solo autovalore reale.

RISPOSTA: $t=10-a$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $(1,1,1)$ e parallela ai piani di rispettive equazioni $(b+1)x+y+(a+1)z=5$ e $(b+1)x-y+(a+1)z=7$.

EQUAZIONE PARAMETRICA DELLA RETTA: $x=(a+1)t+1, y=1, z=-(b+1)t+1$.
