17/12/2004

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Si consideri la trasformazione lineare $S_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ così definita:

$$S_t(x, y, z, u) = \Big((10 - a)x + y + tz + (t + 1)u, t^2 x + (10 - b)^2 y + (10 - b)^2 u, x + y + u\Big).$$

Si calcolino $\dim(\mathrm{Im}\, S_t)$ e $\dim(\ker S_t)$ al variare del parametro reale t. *(5 punti)*

b) Si scriva la matrice associata, rispetto alla base canonica, ad una trasformazione lineare $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ scelta a piacere fra quelle il cui nucleo contenga il vettore $(a + 1, b + 1, 0, 0)$ pur non essendo identicamente nulle. *(2 punti)*

c) Se a è pari si dia un esempio di un sistema lineare di 3 equazioni in 5 incognite che non ammetta soluzioni e contenga l'equazione $(a + 1)x + (10 - b)y + z + t + u = 0$.

Se a è dispari si dia un esempio di un sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite che ammetta uno spazio delle soluzioni di dimensione 2 e contenga l'equazione $(a + 1)x + (10 - b)y + z + t = 0$. *(2 punti)*

2)

a) Sia $T_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare così definito: $T_t(x, y, z) = \Big((a + 1)z, (a + 1)y + (t - b - 1)z, (a + 1)x\Big)$. Si determini per quali valori del parametro reale t l'operatore lineare T_t è diagonalizzabile. *(5 punti)*

b) Si scriva la matrice associata, rispetto alla base canonica, ad un operatore lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ scelto a piacere fra quelli che ammettono $(10 - a, 10 - b, 1)$ come autovettore associato all'autovalore $a - b$. *(2 punti)*

c) Sia M l'insieme delle matrici 2×2 reali con $a_1^1 = a + 1$.

Se b è pari si dica se in M esiste una matrice A tale che A^{100} sia la matrice nulla. Nel caso si risponda affermativamente, fornire un esempio di tale matrice. Nel caso si risponda negativamente, MOTIVARE LA PROPRIA RISPOSTA.

Se b è dispari si dica se esiste in M una matrice A *simmetrica* tale che A^{100} sia la matrice nulla. Nel caso si risponda affermativamente, fornire un esempio di tale matrice. Nel caso si risponda negativamente, MOTIVARE LA PROPRIA RISPOSTA. *(2 punti)*

17/12/2004

SOLUZIONI

1)

a) La matrice A_t associata a S_t rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 10-a & 1 & t & t+1 \\ t^2 & (10-b)^2 & 0 & (10-b)^2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sottraendo dall'ultima colonna la somma della seconda e della terza si ottiene la matrice

$$B_t = \begin{pmatrix} 10-a & 1 & t & 0 \\ t^2 & (10-b)^2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui rango (coincidente con quello di A_t) è 3 per $t \neq 0, 10-b, b-10$ e 2 altrimenti. Dato che $\dim(ImS_t) = \rho(A_t)$ si ha che $\dim(ImS_t)$ è 3 per $t \neq 0, 10-b, b-10$ e 2 altrimenti. Dall'equazione dimensionale $\dim(\ker S_t) + \dim(ImS_t) = 4$ si ricava che $\dim(\ker S_t)$ è 1 per $t \neq 0, 10-b, b-10$ e 2 altrimenti.

b) Una matrice verificante la condizione richiesta è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c)

(a pari) Un esempio fra gli infiniti possibili è dato da

$$\begin{cases} (a+1)x + (10-b)y + z + t + u = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

(a dispari) Un esempio fra gli infiniti possibili è dato da

$$\begin{cases} (a+1)x + (10-b)y + z + t = 0 \\ x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

2)

a) La matrice associata a T_t rispetto alla base canonica è

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+1 \\ 0 & a+1 & t-b-1 \\ a+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice caratteristica è

$$\lambda I - A_t = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -(a+1) \\ 0 & \lambda-(a+1) & (b+1)-t \\ -(a+1) & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è dunque $p(\lambda) = (\lambda-(a+1))(\lambda^2-(a+1)^2) = (\lambda-(a+1))^2(\lambda+(a+1))$. Perciò abbiamo i due autovalori $a+1$ e $-(a+1)$, con $ma(a+1) = 2$ e $ma(-(a+1)) = 1$. Quindi il nostro operatore lineare sarà diagonalizzabile se e solo se $mg(a+1) = 2$. Dato che $mg(a+1) = 3 - \rho\big((a+1)I - A_t\big)$ e $\rho\big((a+1)I - A_t\big)$ è 1 se $t = b+1$ e 2 altrimenti, si ha che T_t è diagonalizzabile se e solo se $t = b+1$.

b) Una matrice verificante la condizione richiesta è $(a-b)I$.

c)

(b pari) Una matrice verificante la condizione richiesta è

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a+1 \\ -(a+1) & -(a+1) \end{pmatrix}$$

(visto che A^2 è la matrice nulla anche A^{100} sarà la matrice nulla).

(b dispari) Non esiste una tale matrice A. In caso contrario esisterebbe anche una matrice diagonale D simile ad A con D^{100} uguale alla matrice nulla. Questo implicherebbe D uguale alla matrice nulla e dunque anche A dovrebbe essere la matrice nulla, contro la condizione $a_1^1 = a+1$.