8 Gennaio 2018 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} x & & + & z & + & 2u & = & a+1 \\ 3x & + \ (a+1+k)y & + & 3z & + & (2a+8+2k)u & = & 3a+b+4 \\ & & & (b+1-k^2)z & + & (b+1-k^2)u & = & 1 \\ 2x & & + & 2z & + & (4+k)u & = & 2a+2+2k \end{cases}.$$

RISPOSTA:

Caso $(a,b) \notin \{(0,0),(1,3),(2,8)\}$**.** Se $k \in \{-a-1, \sqrt{b+1}, -\sqrt{b+1}\}$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = 0$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k \notin \{-a-1, \sqrt{b+1}, -\sqrt{b+1}, 0\}$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Caso $(a,b) \in \{(0,0),(1,3),(2,8)\}$**.** Se $k \in \{-a-1, \sqrt{b+1}\}$ lo spazio delle soluzioni è vuoto. Se $k = 0$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1. Se $k \notin \{-a-1, \sqrt{b+1}, 0\}$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (cioè contiene un solo punto).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11-a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 11-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = 320 - 31a - 31b + 3ab$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x,y,z) = \Big((2b-a-10)x + \big((10-a)(a-b)-1\big)y + \big((10-a)(b-10)-1\big)z, 0, 0\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\{(10-a,1,-1),(1,b-10,b-a)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^3$ definito ponendo

$$F(x,y,z)=\Big((a+1)x+ky+(b+1)z,0,kx+z\Big)$$

è semplice.

RISPOSTA: F è semplice se e solo se $k\neq -\frac{a^2}{4b+4},\frac{a+1}{b+1}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1=\Big((1,0),(0,1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2=\Big((a+2,b+2),(a+1,b+2)\Big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a+1}{b+2} \\ -1 & \frac{a+2}{b+2}\end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2))\mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} b+1 & a+1 \\ a+1 & -t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $t<-\frac{(a+1)^2}{b+1}$.

Esercizio 7 (2 punti) Dire se esiste e, eventualmente, calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo

$$f(x,y)=\Big(x+(10-a)y,(10-b)y\Big).$$

RISPOSTA: Esiste se $b\neq 9$ e in tal caso una base spettrale è $((1,0),(10-a,9-b))$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica per quali valori del parametro reale k le rette di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni $\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ (11-a)x-kz &= 2\end{cases}$ e $\begin{cases} x-y-z &= 1 \\ x-(11-b)y &= 0\end{cases}$ sono fra loro ortogonali.

RISPOSTA: $k=-\frac{(11-a)(9-b)}{10-b}$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale V dei polinomi di grado minore o uguale a 3 che si annullano in $a+1$ e $b-10$.

RISPOSTA: $\dim V=2$.