22 Gennaio 2018   Matricola: a =   , b =

Seconda prova dell'esame del corso

GEOMETRIA E ALGEBRA T

(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (10-b)x + y - u = 0 \\ (k^2+1)y + (b-2k)z - 2u = -1 \\ (k+1)z - 3u = 6 \\ (b-10)x + k^2y + (b+2)z + (k-a-1)u = 4 \end{cases}.$$

RISPOSTA:

Se $k = -1$ lo spazio delle soluzioni è vuoto.

Se $k = a - 6$ lo spazio delle soluzioni è vuoto.

Se $k \neq -1, a-6$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 0 (una sola soluzione).

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 10-b \\ 5 & 3 & 4 & a+b \\ 2 & a-1 & 1 & 10-b+a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = a^3 + a^2b - 5a^2 - 2ab + 7a - 3b + 23$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $T(x, y, z) =$

$$\Big((b+2)x+(b+1)(9-a)y+2z, (a+1)x+2(a+1)z, (a+2)x+(a+2)(9-a)y, (b+2)x+(2b+4)z\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\Big\{(b+1, 0, a+2, 0), \Big(\frac{(a+2)^2}{(b+1)^2+(a+2)^2}, a+1, -\frac{(b+1)(a+2)}{(b+1)^2+(a+2)^2}, b+2\Big)\Big\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 10-b \\ 0 & 0 & 0 \\ a-10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è semplice.

RISPOSTA: F è semplice se e solo se $|k| > 2\sqrt{(10-a)(10-b)}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \big((a+11, b-1),(b+1, 2a+22)\big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{2(a+10)^2+4(a+10)-b^2+3}\begin{pmatrix} 2a+22 & -b-1 \\ -b+1 & a+11 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 12-b & 2t \\ t^2+1 & 11-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $t = 1$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo $f(x,y) = \big((10-a)^2 y, (b+1)^2 x\big)$.

RISPOSTA: Una base spettrale è $\big((10-a, b+1),(10-a, -b-1)\big)$.

Esercizio 8 (2 punti) Si scriva un'equazione parametrica della retta ottenuta tramite l'intersezione del piano $z = 0$ con il piano ortogonale al vettore $v = (10-a, b+1, -2)$ e passante per il punto $(0,0,10)$.

RISPOSTA: $\begin{cases} x = -\frac{b+1}{10-a}t - \frac{20}{10-a} \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale V delle matrici quadrate 2×2 che hanno traccia nulla e si possono scrivere come

$$\begin{pmatrix} x & (10-b)y \\ (10-a)y & z \end{pmatrix}$$

con x, y, z numeri reali.

RISPOSTA: $\dim V = 2$.
