19 Febbraio 2018 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (11-b)x + y + 3z = k + a - 6 \\ (22-2b)x + (9-a-k)y + 6z = 2 \\ (22-2b)x - y + (19-b+k)z = 4 \end{cases}$$

RISPOSTA:

Se $k \neq 7-a, b-13$ $\dim(Sol(S_k)) = 0$ (esiste una e una sola soluzione). Se $k = 7-a$ $\dim(Sol(S_k)) = 1$. Se $k = b-13$ non ci sono soluzioni.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} b-10 & 1 & 1-a & 1 \\ a-10 & 0 & 1-b & 0 \\ b-10 & 0 & 1+a & 1 \\ a-10 & 1 & 1+b & 0 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (a+b)(2a-20)$

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x,y,z) = \Big(bx+(b^2+1)y-z, (a+1)bx+(b^2+1)(a+1)y-(a+1)z, bx+(b^2+1)y-z\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\{(1,0,b), (-b,1,1)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Si consideri l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ è

$$A = \begin{pmatrix} k & a+1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b+3 \end{pmatrix}.$$

Dire per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo F_k è semplice.

RISPOSTA: F_k non è mai semplice.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \big((a+1,2),(1,b+3)\big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \frac{1}{3a+ab+b+1}\begin{pmatrix} b+3 & -1 \\ -2 & a+1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} a^2-1 & t^2+1 \\ -a & 13-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione non è mai un prodotto scalare.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo $f(x,y) = \big(5x + \frac{5a-ab-b+5}{a+2}y, (10-b)y\big)$.

RISPOSTA: Una base spettrale è $\big((a+1,a+2),(1,0)\big)$.

NB: se $b=5$ ogni base di $\mathbb{R}^2$ è una base spettrale per f.

Esercizio 8 (2 punti) Dati la retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x+y+(b+1)^2z = -b-1 \\ (10-a)x+15y+z = -3 \end{cases}$$

e il piano di equazione

$$x+y+k^2z = -k$$

determinare per quali valori di k essi sono paralleli disgiunti e quando il piano contiene la retta.

RISPOSTA: Per $k = b+1$ il piano contiene la retta. Per $k = -b-1$ il piano e la retta sono paralleli e disgiunti.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale V dei polinomi di grado minore o uguale a 4 che si annullano in $21 - a - b$ e $-a - 5$.

RISPOSTA: $\dim V = 3$.
