18 giugno 2018 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (b+1)x + y + 2z + \Big((b-a)k + (a+1)(b+1)\Big)u = 2 \\ kx + y + 2z + \Big((b-a)k + (a+1)(b+1)\Big)u = 2 \\ (b+1)x + y + 2z + k^2u = 2 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Il sistema lineare è possibile per ogni valore di k. Si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 3$ per $k = b+1$, $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 2$ per $k = -a-1$ e $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 1$ per $k \neq b+1, -a-1$.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11-b & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11-b & 0 \\ 0 & 0 & 17-a+b & a+2 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = (11-b)^3(a+2)$

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per l'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo $T(x, y, z) =$

$$\Big((20-2a)x+(a+b-10)y, y, (3a+3b+3)x+(2a+2b+2)y+(a+b+1)z, 2bx+(a-b-10)y\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\{(10-a, 0, 0, b), (b, 1, 0, a-10), (0, 0, 1, 0)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F_k di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a-10 \\ 0 & 0 & 0 \\ b+1 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F_k è semplice se e solo se $|k| > 2\sqrt{(b+1)(10-a)}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \big((0,b+1),(a+3,2)\big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{a+ab+3b+3} & \frac{1}{b+1} \\ \frac{1}{a+3} & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} b+1 & t+1 \\ t+1 & a+7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $-1-\sqrt{(b+1)(a+7)} < t < -1+\sqrt{(b+1)(a+7)}$.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo $f(x,y) = \big(2x, -\frac{a+1}{5}x+3y\big)$.

RISPOSTA: Una base spettrale è $\big((5,a+1),(0,1)\big)$.

Esercizio 8 (2 punti) Si dica se esistono valori del parametro reale k per i quali la retta r_k e il piano π_k di $\mathbb{R}^3$ di rispettive equazioni (parametrica in t e cartesiana)

$r_k : \begin{cases} x = -\frac{(11-b)}{10-b}t - \frac{(11-b)}{10-b}k \\ y = \frac{t}{10-b} + \frac{k}{10-b} \\ z = t \end{cases}$ e $\pi_k : x+y+z+k=0$ sono fra loro ortogonali. Se tali valori esistono si dica quali sono.

RISPOSTA: Non esiste nessun valore di k che abbia la proprietà richiesta, poiché la retta r_k giace sul piano π_k per ogni valore di k.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale V delle matrici quadrate 3×3 simmetriche a traccia nulla della forma

$$\begin{pmatrix} (a+1)x & y & b-10 \\ y & 0 & z \\ b-10 & z & -(a+1)x \end{pmatrix}$$

con x, y, z numeri reali.

RISPOSTA: $\dim V = 3$