18/7/2003

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango). Non consegnare alcun altro foglio.*

1) Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$. Data la trasformazione lineare T_t da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_t(x)$ dove

$$A_t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & \beta - t & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & \alpha + t & 2t - \alpha \\ -2\alpha & t - \beta & -2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$$

a) Si calcolino le dimensioni di $\ker T_t$ e $Im\ T_t$ al variare del parametro reale t. *(6 punti)*
b) Si calcoli una base per l'immagine di T_t nel caso $t = -1$. *(3 punti)*

2)
a) Si scriva, rispetto alla base canonica, la matrice associata all'unico endomorfismo $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ per il quale $(1, 1, 1)$ e $(1, 0, 1)$ sono due autovettori associati all'autovalore $10 - a$ e $(0, 1, 1)$ è un autovettore associato all'autovalore $10 - b$. *(5 punti)*
b) Si ortonormalizzi col metodo di Gram-Schmidt la base B dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$ data da $B = \big((1, 1, 0), (11 - a, 9 - a, 0), (20 - 2b, 0, 1)\big)$. *(4 punti)*

Soluzione di1)a
$\dim Im(T_t) = 3, \dim \ker(T_t) = 1$ per $t \neq 0, \beta$
$\dim Im(T_t) = 2, \dim \ker(T_t) = 2$ altrimenti

Soluzione di 1)b
Base per ImT_{-1}: $\big((3, 1, \alpha, -2\alpha), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\big)$

Soluzione di 2)a

$$\begin{pmatrix} 10 - a & 0 & 0 \\ b - a & 10 - a & a - b \\ b - a & 0 & 10 - b \end{pmatrix}$$

Soluzione di 2)b
Base ortonormalizzata: $B' = \big((1, 1, 0)/\sqrt{2}, (1, -1, 0)/\sqrt{2}, (0, 0, 1)\big)$.