16 luglio 2018 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso

GEOMETRIA E ALGEBRA T

(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (b+1)x + (a+b+1)y + z + -u = k^2 \\ (b+1)x + ky + z + u = a+1 \\ (a+b+1-k)y - 2u = 1-a-k \\ 2(b+1)x + (a+b+1+k)y + 2z = a+1+k^2 \end{cases}.$$

RISPOSTA: Si ha che $\dim Sol(\mathbf{S}_k) = 2$ per $k = 1, -2$, altrimenti il sistema è impossibile.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & b+1 & 1 & 1 & 7 \\ 10-a & 0 & 10-a & 1 & 7 \\ 10-a & 0 & 0 & a+b+1 & 7 \\ 10-a & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 10-a & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = -2(10-a)^2(b+1)(a+b+1)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale per il nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((a-13)x + (b+2)z, (a-13)y + z, 0\Big).$$

BASE ORTOGONALE $=\{(b+2, 1, 13-a)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k risulta semplice l'endomorfismo F di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} a+11 & 0 & 0 \\ 0 & b+1 & k \\ 0 & 1 & b+1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: F è semplice se e solo se $k > 0$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \big((1,0),(0,1)\big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \big((10-a, a+1),(10-b, b)\big)$ in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \frac{1}{10a-11b+10}\begin{pmatrix} -b & -b+10 \\ a+1 & a-10 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (1 punto) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto (x_1,x_2)\begin{pmatrix} t^2+1 & t \\ t & 10-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare per ogni valore di t.

Esercizio 7 (2 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^2$ definito ponendo $f(x,y) = \big((a+1)y, y\big)$.

RISPOSTA: Una base spettrale è $\big((a+1,1),(1,0)\big)$.

Esercizio 8 (2 punti) Determinare un'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale al piano $\pi : (a+1)x+(b+1)z = 3$ e passante per i punti $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$.
RISPOSTA: $(b+1)x+(b+1)y-(a+1)z = b+1$.

Esercizio 9 (1 punto) Calcolare la dimensione dello spazio vettoriale V dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 6 che hanno $a+b$ come radice di molteplicità maggiore o uguale a 2.

RISPOSTA: $\dim V = 5$
