3 Settembre 2018 Matricola: a = , b =

Seconda prova dell'esame del corso
GEOMETRIA E ALGEBRA T
(Ing. Informatica)

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, riportando SOLTANTO i risultati richiesti. Non consegnare alcun altro foglio. Qualora non sia possibile calcolare radici e frazioni in modo esatto, lasciarle in forma simbolica. Non sviluppare le potenze se non strettamente necessario.**

Esercizio 1 (3 punti) Dire per quali valori del parametro reale k il seguente sistema lineare $\mathbf{S}_k$ nelle incognite x, y, z, u è possibile, specificando nei vari casi la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (a+11-k)x + (b+10+k)y + z - u = 3 \\ -x + (b+10+k)y - z + u = 0 \\ x + z - u = 1 \end{cases} .$$

RISPOSTA: Se $k \neq a+10, -b-10$ lo spazio delle soluzioni ha dimensione 1, altrimenti lo spazio delle soluzioni è vuoto.

Esercizio 2 (1 punto) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & b+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $\det A = a(b+1)$.

Esercizio 3 (3 punti) Calcolare una base ortogonale dell'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo

$$T(x, y, z) = \Big((a+10)x + y + (a+11)z, (b+10)y + (b+10)z, y + z\Big).$$

B. ORT. $= \{(1, 0, 0), (0, b+10, 1)\}$.

Esercizio 4 (3 punti) Calcolare una base spettrale per l'endomorfismo f dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = \Big((a+1)y + (b+10)z, (a+1)x, (b+10)x\Big).$$

BASE SPETTRALE =
$\Big\{(0, b+10, -a-1), \Big(\sqrt{(a+1)^2 + (b+10)^2}, a+1, b+10\Big), \Big(\sqrt{(a+1)^2 + (b+10)^2}, -a-1, -b-10\Big)\Big\}$.

Esercizio 5 (2 punti) Calcolare la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}_1 = \Big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\Big)$ alla base $\mathcal{B}_2 = \Big((a{+}1, b{+}1, 1),(1,1,0),(1,0,0)\Big)$ in $\mathbb{R}^3$.

RISPOSTA: $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -b-1 \\ 1 & -1 & b-a \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 (2 punti) Stabilire se esistano o meno valori del parametro reale t per i quali la funzione

$$((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) \mapsto (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a-t & 0 & 0 \\ 0 & b-t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ e, in caso affermativo, dire quali siano tali valori.

RISPOSTA: La funzione è un prodotto scalare se e solo se $0 < t < \min(a,b)$.

Esercizio 7 (1 punto) Calcolare una matrice diagonale B che sia simile alla matrice $A = \begin{pmatrix} a+10 & a+b+10 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $B = \begin{pmatrix} a+10 & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$.

Esercizio 8 (2 punti) Si calcoli $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a+2 & -1 \end{pmatrix}^{99}$.

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a+2 & -1 \end{pmatrix}^{99} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a+2 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 9 (1 punto) Determinare l'equazione del piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale ai piani di equazioni $x+(a+1)y+(a+1)z = 10$ e $-(b+1)x-(a+1)y = 25$ e passante per il punto $(-1,0,0)$.

RISPOSTA: $(a+1)x-(b+1)y+bz = -(a+1)$.
