19 Gennaio 2007 Nome: Num. matricola: a= b=

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 263571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) *Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$. Data la trasformazione lineare T_t da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_t(x)$ dove*

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & (t-2) & -1 & 1 & (\beta-2) \\ 2 & (t+\alpha-1) & -2 & 0 & (\beta-t) \end{pmatrix}$$

a) *Calcolare le dimensioni di $Ker\ T_t$ e $Im\ T_t$ al variare del parametro reale t. (5 punti)*

b) *Nello spazio euclideo 3-dimensionale, fornire una rappresentazione della retta parallela ai piani di equazioni cartesiane $\pi_1 : x + (a+1)z - (a+1) = 0$, $\pi_2 : y + (b+1)z = 0$ e passante per il punto $P = (a, b, -1)$. (3 punti)*

2) *Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Dato l'endomorfismo T_k da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove*

$$A_k = \begin{pmatrix} (k+\alpha) & k & (k+\beta) \\ 0 & k & 0 \\ (k+\alpha) & 0 & (k+\beta) \end{pmatrix}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo è diagonalizzabile. (5 punti)*

b) *Posto $k = 0$, verificare che T_0 ammette base spettrale e calcolarne una. (3 punti)*

c) *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di prodotto scalare.*

Se b è un numero dispari: *Dimostrare che se $\{u_1, u_2, u_3\}$ è un sottoinsieme di V linearmente indipendente, e se $w \in V$ è un vettore non nullo tale che $< w, u_1 >=< w, u_2 >=< w, u_3 >= 0$, allora $\{u_1, u_2, u_3, w\}$ è un sottoinsieme di V linearmente indipendente.*

Se b è un numero pari: *Dimostrare che se $\{u, v, w\}$ è un sottoinsieme di V linearmente indipendente, allora anche $\{u + v, v + w, u + w\}$ è un sottoinsieme di V linearmente indipendente. (2 punti)*

SOLUZIONI:

1a) *Se $t \neq \alpha + 1, -\beta$ risulta $\rho(A_t) = 4$ e dunque $dim(Im(T_t)) = 4, dim(Ker(T_t))) = 1$;*
se $t = \alpha + 1$ risulta $\rho(A_{\alpha+1}) = 3$ e dunque $dim(Im(T_{\alpha+1})) = 3, dim(Ker(T_{\alpha+1})) = 2$;
se $t = -\beta$ risulta $\rho(A_{-\beta}) = 3$ e dunque $dim(Im(T_{-\beta})) = 3, dim(Ker(T_{-\beta})) = 2$.

1b) *Una rappresentazione parametrica per la retta cercata è $r : x = a - (a+1)t, y = b - (b+1)t, z = -1 + t$.*

2a) **Caso $\alpha \neq \beta$:**
Il polinomio caratteristico è $p(t) = t(t-k)(t-(2k+\alpha+\beta))$. Gli autovalori sono $0, k, 2k+\alpha+\beta$.

Se $k \neq 0, -\frac{(\alpha+\beta)}{2}, -\alpha-\beta$ si hanno tre autovalori distinti e quindi A_k è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = 0$ abbiamo che $ma(\alpha+\beta) = mg(\alpha+\beta) = 1$ e $ma(0) = mg(0) = 2$ e dunque A_0 è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = -\frac{(\alpha+\beta)}{2}$ abbiamo che $ma(-\frac{(\alpha+\beta)}{2}) = mg(-\frac{(\alpha+\beta)}{2}) = 1$ e $ma(0) = 2 \neq mg(0) = 1$ e dunque $A_{-\frac{(\alpha+\beta)}{2}}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = -\alpha-\beta$ abbiamo che $ma(0) = mg(0) = 1$ e $ma(-\alpha-\beta) = 2 \neq mg(-\alpha-\beta) = 1$ e dunque $A_{-\alpha-\beta}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

Caso $\alpha = \beta$:
Il polinomio caratteristico è $p(t) = t(k-t)(t-(2k+2\alpha))$. Gli autovalori sono $0, k, 2k+2\alpha$.

Se $k \neq 0, -\alpha, -2\alpha$ si hanno tre autovalori distinti e quindi A_k è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = 0$ abbiamo che $ma(2\alpha) = mg(2\alpha) = 1$ e $ma(0) = mg(0) = 2$ e dunque A_0 è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = -\alpha$ abbiamo che $ma(-\alpha) = mg(-\alpha) = 1$ e $ma(0) = mg(0) = 2$ e dunque $A_{-\alpha}$ è diagonalizzabile per similitudine.

Se $k = -2\alpha$ abbiamo che $ma(0) = mg(0) = 1$ e $ma(-2\alpha) = 2 \neq mg(-2\alpha) = 1$ e dunque $A_{-2\alpha}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

2b) *Se $k = 0$ abbiamo che $ma(\alpha+\beta) = mg(\alpha+\beta) = 1$ e $ma(0) = mg(0) = 2$ e dunque A_0 è diagonalizzabile per similitudine. Quindi T_0 ammette base spettrale: una tra le possibili è $\{(-\beta, 0, \alpha), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.*

2c) **Caso b dispari:** *Dalla definizione di lineare indipendenza, $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$. Si consideri ora l'uguaglianza $\alpha_1' u_1 + \alpha_2' u_2 + \alpha_3' u_3 + \alpha_4' w = 0$; si ha che $\langle w, \alpha_1' u_1 + \alpha_2' u_2 + \alpha_3' u_3 + \alpha_4' w \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle w, \alpha_1' u_1 +$*

$\alpha'_2 u_2 + \alpha'_3 u_3\rangle + \langle w, \alpha'_4 w\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha'_1\langle w, u_1\rangle + \alpha'_2\langle w, u_2\rangle + \alpha'_3\langle w, u_3\rangle + \alpha'_4\langle w, w\rangle = 0$, *dove le varie equivalenze derivano dalle proprietà del prodotto scalare. Essendo* w *vettore non nullo e da* $\langle w, u_1\rangle = \langle w, u_2\rangle = \langle w, u_3\rangle = 0$, *abbiamo che* $\alpha'_1\langle w, u_1\rangle + \alpha'_2\langle w, u_2\rangle + \alpha'_3\langle w, u_3\rangle + \alpha'_4\langle w, w\rangle = 0 \Rightarrow \alpha'_4\langle w, w\rangle = 0 \Rightarrow \alpha'_4 = 0$. *Quindi*, $\alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2 + \alpha'_3 u_3 + \alpha'_4 w = 0 \Rightarrow \alpha'_4 = 0 \Rightarrow \alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2 + \alpha'_3 u_3 = 0 \Rightarrow \alpha'_1 = \alpha'_2 = \alpha'_3 = 0$, *cioè i vettori* $\{u_1, u_2, u_3, w\}$ *sono linearmente indipendenti.*

Caso b pari: *Dalla definizione di lineare indipendenza*, $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$. *Si consideri ora la combinazione lineare nulla* $\alpha'(u+v) + \beta'(u+w) + \gamma'(v+w) = 0 \Leftrightarrow (\alpha' + \beta')u + (\alpha' + \gamma')v + (\beta' + \gamma')w = 0$. *Dalla lineare indipendenza dei vettori* u, v, w, *l'ultima equivalenza implica* $\alpha' + \beta' = 0, \alpha' + \gamma' = 0, \beta' + \gamma' = 0 \Rightarrow \alpha' = \beta' = \gamma' = 0$, *cioè i vettori* $\{u+v, u+w, v+w\}$ *sono linearmente indipendenti.*